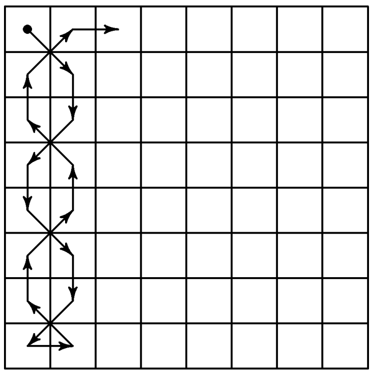
2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

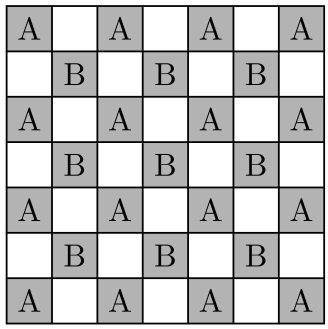
---

1. *Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo“ a „priamo“. „Šikmo“ znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo“ znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n, pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo“, že figúrka prejde celú šachovnicu a na každom políčku sa ocitne práve raz.* (Peter Novotný)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že úloha má riešenie pre ľubovoľné párne n. Ak postavíme figúrku napr. na ktorékoľvek rohové políčko šachovnice $n \times n$, prejdeme celú šachovnicu po susedných blokoch typu $2 \times n$ spôsobom naznačeným na obr. 1 pre $n = 8$. Postupnosti ťahov tu zodpovedá postupnosť na seba nadväzujúcich orientovaných úsečiek. Celkom analogicky možno postupovať pre každé párne n.



Obr. 1



Obr. 2

Teraz ukážeme, že pre žiadne nepárne $n \geqq 3$ nemožno šachovnicu prejsť požadovaným spôsobom. Dôkaz urobíme sporom. Pripusťme, že pre určité nepárne n na šachovnici $n \times n$ existuje postupnosť ťahov vyhovujúca podmienkam úlohy. Všetky políčka ofarbíme podobne ako bežnú šachovnicu 8×8, a to tak, že rohové políčka budú čierne (podobne ako na obr. 2 pre $n = 7$). Ďalej všetky čierne políčka označíme písmenami A a B tak, aby žiadne dve čierne políčka majúce spoločný práve jeden bod (vrchol) neboli označené rovnakým písmenom. Ak budú rohové (čierne) políčka označené napr. písmenom A, bude zrejme počet políčok A o n väčší ako počet políčok B.

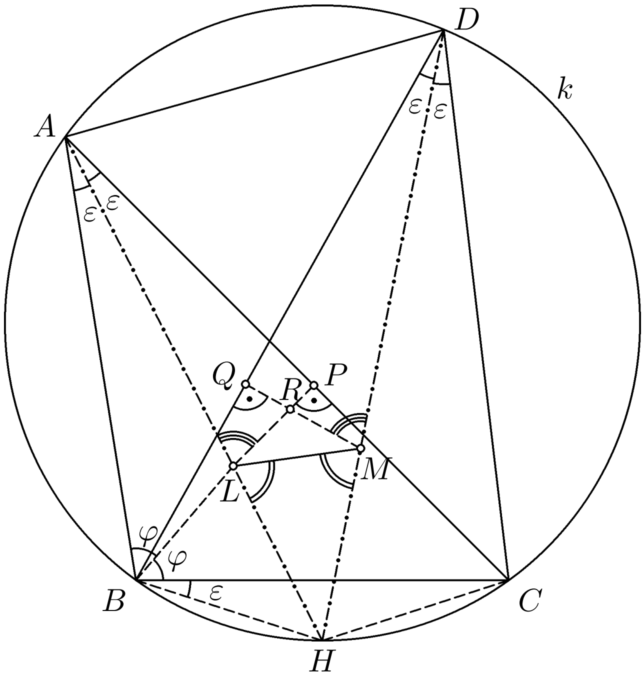
Políčka šachovnice, ktoré figúrka požadovaným spôsobom prejde, označme postupne $1, 2, 3, \dots, n^2$ a k-ty ťah zápisom $k \mapsto k + 1$. Ak je políčko s číslom 1 čierne, sú čierne práve políčka s číslami $1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots$; pritom každý (šikmý) ťah $1 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6$, $9 \mapsto 10$, … spája čierne políčka označené rôznymi písmenami, takže sa celkové počty políčok A a B líšia najviac o 1, čo odporuje zistenému rozdielu. K rovnakému sporu dôjdeme aj v prípade, keď je políčko s číslom 1 biele, takže čierne sú práve políčka s číslami $3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$ spojená (šikmými) ťahmi $3 \mapsto 4$, $7 \mapsto 8$, $11 \mapsto 12$, …

Tým je úloha vyriešená, riešením sú všetky párne $n \geqq 2$.

2. *V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný.*

(Pavel Leischner)

Riešenie. Priesečník osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A, D v trojuholníkoch BCA, BCD označme H (obr. 3). Ako je známe, bod H je stredom príslušného oblúka BC



Obr. 3

kružnice k opísanej štvoruholníku $ABCD$ (oblúka, ktorý neobsahuje vrcholy A a D). Označme $\varepsilon = |\measuredangle BAH| = |\measuredangle CAH| = |\measuredangle BDH| = |\measuredangle CDH| = |\measuredangle CBH|$ a $\varphi = |\measuredangle ABL| = |\measuredangle CBL|$. Potom platí

$$|\measuredangle BLH| = |\measuredangle BAL| + |\measuredangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\measuredangle LBH|.$$

Trojuholník HLB je teda rovnoramenný so základňou LB, takže $|HB| = |HL|$. Analogicky aj $|HC| = |HM|$. A pretože $|HB| = |HC|$, dostávame $|HL| = |HM|$. Takže trojuholník HML je rovnoramenný a $|\measuredangle HLM| = |\measuredangle HML|$.

Označme ešte P kolmý priemet bodu L na priamku AC a Q kolmý priemet bodu M na priamku BD (uvažovaný bod R je tak priesečníkom priamok LP a MQ). Keďže pravouhlé trojuholníky APL a DQM sa zhodujú v uhloch pri vrcholoch A a D, sú zhodné aj uhly PLA a QMD pri vrcholoch L a M. Odtiaľ a z rovnosti $|\measuredangle HLM| = |\measuredangle HML|$ tak vyplýva rovnosť $|\measuredangle PLM| = |\measuredangle QML|$. To znamená, že trojuholník LMR je rovnoramenný, ako sme mali dokázať.

3. *Označme* $\mathbb{N}$ *množinu všetkých prirodzených čísel a uvažujme všetky funkcie* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *také, že pre ľubovoľné* $x, y \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x).$$

Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(2\,007)$. (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Uvažujme ľubovoľnú funkciu f s požadovanými vlastnosťami. Najskôr ukážeme, že je prostá. Ak $f(y_1) = f(y_2)$, tak pre všetky prirodzené čísla x platí

$$y_1 f(x) = f\left(xf(y_1)\right) = f\left(xf(y_2)\right) = y_2 f(x),$$

a nakoľko $f(x)$ je prirodzené číslo, vyplýva odtiaľ $y_1 = y_2$, čo znamená, že funkcia f je prostá.

Voľbou $x = 1$ v danej rovnici dostaneme $f\left(f(y)\right) = yf(1)$, čo pre $y = 1$ dáva $f\left(f(1)\right) = f(1)$. Keďže f je prostá, vyplýva odtiaľ

$$f(1) = 1, \tag{1}$$

takže pre všetky prirodzené čísla y navyše platí

$$f\left(f(y)\right) = y. \tag{2}$$

Z práve odvodeného vzťahu zároveň vyplýva, že oborom hodnôt funkcie f je celá množina $\mathbb{N}$. Môžeme teda pre ľubovoľné prirodzené číslo z nájsť y, pre ktoré $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podľa vzťahu zo zadania potom platí

$$f(xz) = f\left(x(f(y)\right) = yf(x) = f(z)f(x).$$

Odtiaľ možno matematickou indukciou ľahko odvodiť, že pre všetky prirodzené čísla n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{3}$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ ľubovoľného prvočísla p je tiež prvočíslo. Predpokladajme, že $f(p) = ab$, pričom a, b sú prirodzené čísla rôzne od 1. Podľa (2) a (3) platí

$$p = f\left(f(p)\right) = f(ab) = f(a)f(b).$$

Keďže funkcia f je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1$, $f(b) > 1$, čo je v rozpore s predpokladom, že p je prvočíslo.

Keďže $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla $2\,007$ na prvočísla, dostaneme podľa (3)

$$f(2\,007) = f^2(3)f(223),$$

pričom obe čísla $f(3)$ a $f(223)$ sú prvočísla. Ak $f(3) = 2$, potom podľa (2) platí $f(2) = 3$ a najmenšia možná hodnota $f(223)$ je 5, takže $f(2\,007) \geqq 20$. Pokiaľ $f(3) = 3$, najmenšia možná hodnota $f(223)$ je 2 a platí $f(2\,007) \geqq 18$. Ľahko vidíme, že pre každú inú voľbu hodnôt $f(3)$ a $f(223)$ platí $f(2\,007) \geqq 18$.

Ukážeme, že existuje funkcia vyhovujúca zadaniu, pre ktorú platí $f(2\,007) = 18$. Definujme funkciu f nasledovným spôsobom: Pre ľubovoľné prirodzené číslo x, ktoré zapíšeme ako $x = 2^k \cdot 223^m \cdot q$, pričom k a m sú celé nezáporné čísla a q je prirodzené číslo nesúdeliteľné s číslami 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vzťahom

$$f(2^k \cdot 223^m \cdot q) = 2^m \cdot 223^k \cdot q.$$

Potom $f(2\,007) = f(223 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Overíme, že táto funkcia f má požadovanú vlastnosť. Nech $x = 2^{k_1} \cdot 223^{m_1} \cdot q_1$ a $y = 2^{k_2} \cdot 223^{m_2} \cdot q_2$ sú ľubovoľné prirodzené čísla zapísané vyššie uvedeným spôsobom. Potom

$$\begin{aligned} f\left(xf(y)\right) &= f\left(2^{k_1} \cdot 223^{m_1} \cdot q_1 \cdot f(2^{k_2} \cdot 223^{m_2} \cdot q_2)\right) = f(2^{k_1+m_2} \cdot 223^{m_1+k_2} \cdot q_1 \cdot q_2) = \\ &= 2^{k_2+m_1} \cdot 223^{m_2+k_1} \cdot q_1 \cdot q_2 \end{aligned}$$

a súčasne

$$yf(x) = 2^{k_2} \cdot 223^{m_2} \cdot q_2 \cdot f(2^{k_1} \cdot 223^{m_1} \cdot q_1) = 2^{k_2+m_1} \cdot 223^{m_2+k_1} \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Najmenšia možná hodnota čísla $f(2\,007)$ je 18.

Poznámka. Z vyššie uvedeného riešenia vyplýva, že každá funkcia f, ktorá vyhovuje danej funkcionálnej rovnici, je určená nejakou bijekciou φ množiny prvočísel na seba, ktorá pre každé prvočíslo p spĺňa rovnosť $\varphi\left(\varphi(p)\right) = p$, a to predpisom

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) &= \varphi(p_1)^{k_1} \varphi(p_2)^{k_2} \dots \varphi(p_m)^{k_m}, \end{aligned}$$

pričom p_i sú navzájom rôzne prvočísla a k_i nezáporné celé čísla. Každá bijekcia φ uvedenej vlastnosti rozkladá množinu prvočísel na zjednotenie jednoprvkových a dvojprvkových navzájom disjunktných množín takých, že pre každú z nich tvaru $\{p\}$ platí $\varphi(p) = p$ a pre každú z nich tvaru $\{p_1, p_2\}$ platí $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(p_2) = p_1$. Naopak každý taký rozklad určuje vyhovujúcu bijekciu φ.

---

4. *Množina* M *obsahuje všetky prirodzené čísla od* 1 *do* 2 007 *vrátane a má nasledujúcu vlastnosť: Ak je číslo n prvkom množiny* M*, ležia v* M *všetky členy aritmetickej postupnosti s prvým členom n a diferenciou $n+1$. Rozhodnite, či množina* M *musí obsahovať všetky prirodzené čísla väčšie ako určité číslo m.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ukážeme, že uvedený záver všeobecne neplatí. Ako protipríklad zvolíme množinu

$$\mathsf{M} = \mathbb{N} \setminus \{a;\ a+1 \text{ je prvočíslo väčšie ako } 2\,008\},$$

ktorá zrejme obsahuje všetky čísla od 1 do 2 007. Pritom aritmetická postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $a_1 = n \in \mathsf{M}$ a diferenciou $d = n+1$ má všeobecný člen tvaru

$$a_k = a_1 + (k-1)d = n + (k-1)(n+1) = (n+1)k - 1,$$

odkiaľ vyplýva, že číslo $a_k + 1 = (n+1)k$ nie je prvočíslo pre žiadny index $k > 1$, takže a_k leží v M pre každý index k (či už $a_k \leqq 2\,007$, alebo $a_k \geqq 2\,008$). Nakoľko prvočísel je nekonečne veľa, je nekonečne veľa aj prirodzených čísel, ktoré v zvolenej množine M neležia.

Iné riešenie. Každá vyhovujúca množina M musí obsahovať všetky členy prvých 2 007 aritmetických postupností s prvým členom $n \leqq 2\,007$ a diferenciou $n+1$:

$$A_1 = (1, 3, 5, \ldots),\ A_2 = (2, 5, 8, \ldots),\ \ldots,\ A_{2\,007} = (2\,007, 4\,015, 6\,023, \ldots).$$

Zrejme množina hodnôt $\mathsf{A}_k = \{k, 2k+1, 3k+2, \ldots\}$ postupnosti A_k je pre každé k tvorená všetkými prirodzenými číslami tvaru $i(k+1)+k$ s celým nezáporným i.

Vysvetlíme, prečo

$$\mathsf{M} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_{2\,007}$$

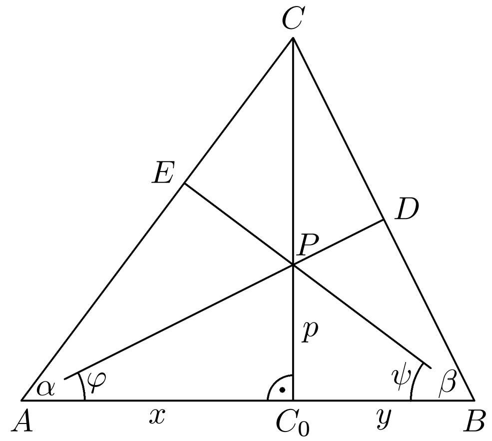
je najmenšia množina s požadovanou vlastnosťou. Ukážeme totiž, že ak $n \in \mathsf{A}_k$ pre niektoré čísla n a k, tak $\mathsf{A}_n \subseteq \mathsf{A}_k$. Nech teda $n \in \mathsf{A}_k$ a $m \in \mathsf{A}_n$. Potom $n = i(k+1)+k$ a $m = j(n+1)+n$ pre vhodné celé nezáporné i a j, odkiaľ $m = j(i+1)(k+1) + i(k+1) + k = (ji+j+i)(k+1)+k$, čo znamená, že $m \in \mathsf{A}_k$.

Existuje však nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorá v zostrojenej „minimálnej" vyhovujúcej množine M neležia; sú to napríklad všetky násobky čísla $2\,008!$.

---

5. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC taký, že $|AC| \neq |BC|$. Vnútri jeho strán BC a AC uvažujme body D a E, pre ktoré je $ABDE$ tetivový štvoruholník. Priesečník jeho uhlopriečok AD a BE označme P. Dokážte, že ak sú priamky CP a AB navzájom kolmé, tak P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC.* (Ján Mazák)

Riešenie. Označme $\varphi = |\measuredangle BAD|$ a $\psi = |\measuredangle ABE|$ (obr. 4). Z rovnosti obvodových uhlov $|\measuredangle AEB| = |\measuredangle ADB|$ v tetivovom štvoruholníku $ABDE$ tak pri zvyčajnom označení



Obr. 4

uhlov v trojuholníku ABC vyplýva

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \tag{1}$$

Označme C_0 pätu výšky z vrcholu C, v_c veľkosť výšky CC_0 a x, y, p veľkosti príslušných úsekov AC_0, BC_0, PC_0 (obr. 4), takže

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{p}{x}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{p}{y}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{v_c}{x}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_c}{y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ak bod P nie je priesečník výšok (t. j. uhol $\alpha+\psi$ nie je pravý), môžeme podľa (1) písať

$$\operatorname{tg}(\alpha+\psi) = \operatorname{tg}(\beta+\varphi),$$

čo podľa známeho vzťahu pre tangens súčtu po dosadení z (2) dáva (využívame rovnosť $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\varphi$, ktorá z (2) tiež vyplýva)

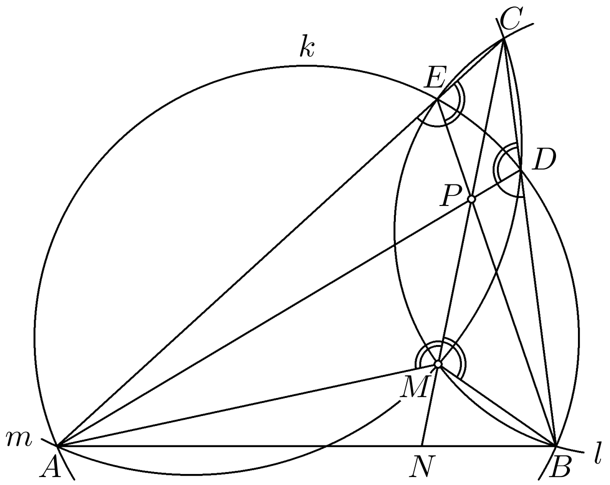
$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x},$$

čiže

$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Keďže vzhľadom na dané predpoklady $p < v_c$ a $x \neq y$, nemôže ostatná rovnosť platiť. Takže $\alpha + \psi = 90°$ a bod P je priesečníkom výšok, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme k kružnicu opísanú tetivovému štvoruholníku $ABDE$ a uvažujme ešte kružnice l a m opísané trojuholníkom BEC a ADC (obr. 5). Tetiva BE kružnice l pretína tetivu AD kružnice m v bode P, kružnice l, m teda majú okrem bodu C ešte ďalší priesečník, ktorý označíme M. Z uvedenej konštrukcie vplýva, že bod P leží vnútri každej z troch uvažovaných kružníc a má k nim rovnakú mocnosť (je to ich *potenčný* bod), preto bod P leží vnútri úsečky CM.



Obr. 5

Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou BC kružnice l vyplýva $|\measuredangle BMC| = |\measuredangle BEC| = 180° - |\measuredangle AEB|$ a analogicky $|\measuredangle AMC| = |\measuredangle ADC| = 180° - |\measuredangle ADB|$, čo vzhľadom na rovnosť obvodových uhlov $|\measuredangle AEB| = |\measuredangle ADB|$ nad tetivou AB kružnice k znamená, že

$$|\measuredangle BMC| = |\measuredangle AMC|.$$

Označme N pätu výšky z vrcholu C trojuholníka ABC. Ak $M \neq N$, znamená ostatná rovnosť, že pravouhlé trojuholníky BNM a ANM sú zhodné, čo však odporuje predpokladu $|AC| \neq |BC|$. Preto $M = N$, $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle BMC| = |\measuredangle AMC| = 90°$ a bod P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC, čo sme chceli dokázať.

6. *Určte všetky usporiadané trojice* (x, y, z) *navzájom rôznych reálnych čísel, ktoré vyhovujú množinovej rovnici*

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y} \right\}.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Ak sú x, y, z tri navzájom rôzne reálne čísla, tak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

sú zrejme čísla rôzne od 0 a -1 a ich súčin je rovný 1. Rovnakú vlastnosť teda musia mať aj hodnoty x, y, z z každej hľadanej trojice. Budeme preto neustále predpokladať, že

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Keďže daná množinová rovnica je pre usporiadané trojice (x, y, z), (z, x, y) a (y, z, x) rovnaká, budeme okrem (2) predpokladať, že $x > \max\{y, z\}$, a rozoberieme dva prípady podľa toho, či $y > z$, alebo $z > y$. Zaveďme ešte označenie intervalov $I_1 = (0, \infty)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

Prípad $x > y > z$. Pre zlomky (1) zrejme platí $u \in I_1$, $v \in I_2$ a $w \in I_3$, takže $u > v > w$. Daná množinová rovnica preto môže byť splnená jedine tak, že $u = x$, $v = y$ a $w = z$. Po dosadení zlomkov (1) a jednoduchej úprave dôjdeme k rovniciam

$$xy + y = yz + z = zx + x, \quad \text{pričom } x \in I_1,\ y \in I_2,\ z \in I_3. \tag{3}$$

Podľa podmienky $xyz = 1$ z (2) môžeme do rovnice $xy + y = zx + x$ za člen zx dosadiť $1/y$ a rovnicu ďalej upraviť:

$$xy + y = \frac{1}{y} + x \Rightarrow x(y-1) = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow x = -\frac{1+y}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{1+x}.$$

(Využili sme to, že vzhľadom na $y \in I_2$ platí $y \neq 1$.) Z ostatného vzťahu vyplýva, že hodnota prvého výrazu v sústave (3) je rovná -1, takže z rovnosti druhého výrazu číslu -1 máme

$$z = -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{x},$$

potom však aj tretí výraz v (3) je rovný -1. Preto každé riešenie našej úlohy (v skúmanom prípade, keď $x > y > z$) má tvar

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{4}$$

pričom $t \in I_1$ je ľubovoľné (pretože platí (3), skúška nie je nutná). Z uvedeného postupu tiež vyplýva, že voľbou $t \in I_2$ (resp. $t \in I_3$) vo vzťahu (4) dostaneme všetky riešenia našej úlohy s vlastnosťou $z > x > y$ (resp. $y > z > x$), takže pri výpise všetkých riešení v záverečnej odpovedi nie je nutné uvádzať cyklické permutácie trojíc zo vzťahu (4).

Prípad $x > z > y$. Pre zlomky (1) teraz platí $u \in I_3$, $v \in I_1$ a $w \in I_2$, takže $v > w > u$. Daná množinová rovnica je teda splnená práve vtedy, keď $u = y$, $v = x$ a $w = z$. Po dosadení zlomkov z (1) dôjdeme k sústave

$$x - y = y(y - z), \quad y - z = x(z - x), \quad z - x = z(x - y). \tag{5}$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme

$$0 = y(y - z) + x(z - x) + z(x - y) = (y - x)(x + y - 2z),$$

odkiaľ vzhľadom na $x \neq y$ vyplýva $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Po dosadení späť do(5) ľahko zistíme (opäť vzhľadom na $x \neq y$), že vyhovuje iba $x = 1$, $y = -2$ a $z = -\frac{1}{2}$. Rovnakou trojicou čísel je tvorené (jediné) riešenie úlohy s vlastnosťou $y > x > z$ aj (jediné) riešenie, pre ktoré $z > y > x$.

Odpoveď. Riešením úlohy sú všetky usporiadané trojice (4), pričom $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a tri trojice (x, y, z) tvaru

$$\left(1, -2, -\tfrac{1}{2}\right), \ \left(-\tfrac{1}{2}, 1, -2\right), \ \left(-2, -\tfrac{1}{2}, 1\right).$$

Poznámka. Ak vypíšeme všetkých šesť možných sústav prislúchajúcich danej množinovej rovnici, dostaneme okrem sústav (3) a (5) ešte sústavy

$$\begin{aligned}
x - y &= z(y - z), & y - z &= y(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= x(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= y(x - y);\\
x - y &= y(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= z(y - z), & y - z &= x(z - x), & z - x &= y(x - y).
\end{aligned}$$

Prvé dve vzniknú zo sústavy (5) cyklickou zámenou premenných, takže ich možno riešiť rovnakým postupom ako (5). Sčítaním všetkých troch rovníc v každej z dvoch zostávajúcich sústav dostaneme tú istú rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \qquad \text{resp.} \qquad (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0,$$

ktorá má jediné riešenie $x = y = z$, čo nie sú navzájom rôzne čísla.

Iné riešenie. Ak sú x, y, z tri navzájom rôzne reálne čísla, tak hodnoty

$$u = \frac{x - y}{y - z}, \quad v = \frac{y - z}{z - x}, \quad w = \frac{z - x}{x - y} \tag{1}$$

sú zrejme rôzne od čísel 0 a -1 a platia medzi nimi vzťahy

$$v = f(u), \quad w = f(v) \quad \text{a} \quad u = f(w), \tag{2}$$

pričom f je lineárna lomená funkcia daná predpisom $f(t) = -\dfrac{1}{1+t}$. Presvedčíme sa o tom priamym výpočtom:

$$f(u) = -\frac{1}{1+u} = -\frac{1}{1+\dfrac{x-y}{y-z}} - \frac{y-z}{(x-y)+(y-z)} = \frac{y-z}{z-x} = v;$$

z dôvodu cyklickosti platia aj zostávajúce dva vzťahy v (2).

Uvedený poznatok znamená, že každé riešenie úlohy je pre vhodné $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ buď usporiadaná trojica tvaru

$$(x, y, z) = (t, f(t), f(f(t))) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{3}$$

alebo usporiadaná trojica tvaru

$$(x, y, z) = (t, f(f(t)), f(t)) = \left(t, -\frac{1+t}{t}, -\frac{1}{1+t}\right). \tag{4}$$

Ostáva urobiť skúšku: ľahko sa presvedčíme, že zatiaľ čo trojica tvaru (3) je riešením pre každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, trojica tvaru (4) vyhovuje iba pre $t = 1$, $t = -2$ a $t = -\frac{1}{2}$ a sú to cyklické permutácie týchto troch hodnôt.