2017/2018
67. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 4. decembra 2017.*)

1. Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel $O - X$, pričom O je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krúžkov ako krížikov a X je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krížikov ako krúžkov.

a) Dokážte, že pre tabuľku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.

b) Určte najvyššie možné skóre dosiahnuteľné pre tabuľku $(2n + 1) \times (2n + 1)$ v závislosti od n.

(*Josef Tkadlec*)

2. Dokážte, že ak je súčet dvoch daných reálnych čísel a, b väčší ako 2, má sústava nerovníc

$$(a - 1)x + b < x^2 < ax + (b - 1)$$

nekonečne veľa riešení x v obore reálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

3. V rovine sú dané dve zhodné kružnice s polomerom 1, ktoré majú vonkajší dotyk. Uvažujme pravouholník obsahujúci obe kružnice, ktorého každá strana sa dotýka aspoň jednej z nich. Určte najväčší a najmenší možný obsah takého pravouholníka.

(*Jaroslav Švrček*)

4. Nájdite najväčšie prirodzené číslo n také, že hodnota súčtu

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x.

(*Patrik Bak*)

5. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ACD|$ a $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADC|$. Predpokladajme, že stred O kružnice opísanej trojuholníku BCD je rôzny od bodu A. Dokážte, že uhol OAC je pravý. (*Patrik Bak*)

6. Nájdite najväčší možný počet prvkov množiny M celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: Z každej trojice rôznych čísel z M možno vybrať niektoré dve, ktorých súčet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentom. (*Ján Mazák*)