

2017/2018  
67. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(Termín odovzdania: v piatok 19. januára 2018.)

1. Nájdite všetky mnohočleny tvaru  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ktoré po delení dvojčlenom  $2x^2 + 1$  dávajú zvyšok  $x + 2$  a po delení dvojčlenom  $x^2 + 2$  dávajú zvyšok  $2x + 1$ .  
(Pavel Calábek)

2. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo  $t$  platia nerovnosti

$$0 \leq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leq |t - 1|.$$

(Tomáš Jurík)

3. Nech  $ABCD$  je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou  $BD$  a  $E$  vnútorný bod jeho strany  $CD$ , ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku  $ABD$ . Určte veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole  $A$ , ak majú kružnice opísané trojuholníkom  $ACD$  a  $BCE$  práve jeden spoločný bod.  
(Jaroslav Švrček)

4. Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel  $a, b, c$ , pre ktoré platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(Patrik Bak)

5. Daný je lichobežník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Uvažujme obe priamky, z ktorých každá delí daný lichobežník na dve časti s rovnakým obsahom a je pritom rovnobežná s jeho uhlopriečkou  $AC$ , resp.  $BD$ . Dokážte, že priesečník týchto dvoch priamok leží na úsečke, ktorá spája stredy oboch základní  $AB$  a  $CD$ .  
(Jaromír Šimša)

6. Nájdite najväčší možný počet čísel, ktoré možno vybrať z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  tak, aby medzi nimi neboli žiadne dve, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5. (Pavel Calábek)