

2017/2018  
67. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(Termín odovzdania: v piatok 19. januára 2018.)

1. Nájdite najmenšie štvorciferné číslo  $\overline{abcd}$  také, že rozdiel

$$(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$$

je trojciferné číslo zapísané tromi rovnakými ciframi.

(Patrik Bak, Mária Dományová)

2. Určte najväčší možný počet neprázdnych po dvoch disjunktných množín s rovnakými súčtami prvkov, na ktoré možno rozdeliť množinu

a)  $\{1, 2, \dots, 2017\}$ ,

b)  $\{1, 2, \dots, 2018\}$ .

Ak je množina tvorená jedným číslom, považujeme ho za súčet jej prvkov.

(Patrik Bak)

3. Daný je pravouhlý trojuholník  $ABC$  s preponou  $AB$ , v ktorom  $D$  označuje päť výšky z vrcholu  $C$ . V polrovine s hraničnou priamkou  $AB$  a vnútorným bodom  $C$  uvažujme body  $E, F$  také, že uhly  $EBA, FAB$  sú pravé,  $|BE| = |BD|$  a  $|AF| = |AD|$ . Dokážte, že priamky  $AE$  a  $BF$  sa pretínajú na úsečke  $CD$ . (Jaroslav Švrček)

4. Určte najväčšie celé číslo  $n$ , pri ktorom možno štvorcovú tabuľku  $n \times n$  zaplniť prirodzenými číslami od 1 po  $n^2$  tak, aby v každej jej štvorcovej časti  $3 \times 3$  bola zapísaná aspoň jedna druhá mocnina celého čísla. (Jaromír Šimša)

5. Daná je kružnica  $k(O, r)$  a bod  $A$ , pričom  $|AO| = d > r$ . Dotýčnice z bodu  $A$  sa dotýkajú kružnice  $k$  v bodoch  $B, C$ . Trojuholníku  $ABC$  je vpísaná kružnica. Vyjadrite jej polomer  $\rho$  pomocou daných dĺžok  $d$  a  $r$ . (Šárka Gergelitsová)

6. Na kruhovom opevnení hradu je niekoľko veží. Do nich sa rozmiestni päť čiernych a päť červených rytierov (v každej veži ich môže byť viac a môžu mať rôzne farby) a začnú strážiť. Po uplynutí každej hodiny prejdú všetci čierni rytieri do susednej veže v smere chodu hodinových ručičiek a všetci červení rytieri prejdú do susednej veže v opačnom smere. Dokážte nasledujúce tvrdenie:

a) Ak je veží osem, môžu sa rytieri na začiatku rozmiestniť tak, že počas každej hodiny bude v každej veži aspoň jeden rytier.

b) Ak je veží sedem, niektorú hodinu ostane aspoň jedna veža neobsadená, nech už sa na začiatku rytieri rozmiestnia akokoľvek.

(Pavel Calábek)