SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

67. ročník, školský rok 2017/2018

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 67. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **4. decembra 2017** (kategória **A**) a do **19. januára 2018** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2018 v Rumunsku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2018 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste alebo septembri 2018 v Poľsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2018 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 67. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	12. 12. 2017	16. 01. 2018	18. – 21. marca 2018
Kategórie B, C	30. 01. 2018	10. 04. 2018	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2017/2018
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel $O - X$, pričom O je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krúžkov ako krížikov a X je celkový počet riadkov a stĺpcov obsahujúcich viac krížikov ako krúžkov.

a) Dokážte, že pre tabuľku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.

b) Určte najvyššie možné skóre dosiahnuteľné pre tabuľku $(2n + 1) \times (2n + 1)$ v závislosti od n.

(*Josef Tkadlec*)

A – I – 2

Dokážte, že ak je súčet dvoch daných reálnych čísel a, b väčší ako 2, má sústava nerovníc

$$(a - 1)x + b < x^2 < ax + (b - 1)$$

nekonečne veľa riešení x v obore reálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

A – I – 3

V rovine sú dané dve zhodné kružnice s polomerom 1, ktoré majú vonkajší dotyk. Uvažujme pravouholník obsahujúci obe kružnice, ktorého každá strana sa dotýka aspoň jednej z nich. Určte najväčší a najmenší možný obsah takého pravouholníka. (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Nájdite najväčšie prirodzené číslo n také, že hodnota súčtu

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x. (*Patrik Bak*)

A – I – 5

V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ACD|$ a $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADC|$. Predpokladajme, že stred O kružnice opísanej trojuholníku BCD je rôzny od bodu A. Dokážte, že uhol OAC je pravý. (*Patrik Bak*)

A – I – 6

Nájdite najväčší možný počet prvkov množiny M celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: Z každej trojice rôznych čísel z M možno vybrať niektoré dve, ktorých súčet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentom. (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Nájdite všetky mnohočleny tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$, ktoré po delení dvojčlenom $2x^2 + 1$ dávajú zvyšok $x + 2$ a po delení dvojčlenom $x^2 + 2$ dávajú zvyšok $2x + 1$. (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo t platia nerovnosti

$$0 \leqq \frac{t^2+1}{t+1} - \sqrt{t} \leqq |t-1|.$$

(*Tomáš Jurík*)

B – I – 3

Nech $ABCD$ je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou BD a E vnútorný bod jeho strany CD, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Určte veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole A, ak majú kružnice opísané trojuholníkom ACD a BCE práve jeden spoločný bod. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(*Patrik Bak*)

B – I – 5

Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obe priamky, z ktorých každá delí daný lichobežník na dve časti s rovnakým obsahom a je pritom rovnobežná s jeho uhlopriečkou AC, resp. BD. Dokážte, že priesečník týchto dvoch priamok leží na úsečke, ktorá spája stredy oboch základní AB a CD. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Nájdite najväčší možný počet čísel, ktoré možno vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ tak, aby medzi nimi neboli žiadne dve, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5. (*Pavel Calábek*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

67. ročník Školský rok 2017 / 2018 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Nájdite najmenšie štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ také, že rozdiel

$$\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$$

je trojciferné číslo zapísané tromi rovnakými ciframi. (*Patrik Bak, Mária Dományová*)

C – I – 2

Určte najväčší možný počet neprázdnych po dvoch disjunktných množín s rovnakými súčtami prvkov, na ktoré možno rozdeliť množinu

a) $\{1, 2, ..., 2017\}$,

b) $\{1, 2, ..., 2018\}$.

Ak je množina tvorená jedným číslom, považujeme ho za súčet jej prvkov. (*Patrik Bak*)

C – I – 3

Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. V polrovine s hraničnou priamkou AB a vnútorným bodom C uvažujme body E, F také, že uhly EBA, FAB sú pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokážte, že priamky AE a BF sa pretínajú na úsečke CD. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Určte najväčšie celé číslo n, pri ktorom možno štvorcovú tabuľku $n \times n$ zaplniť prirodzenými číslami od 1 po n^2 tak, aby v každej jej štvorcovej časti 3×3 bola zapísaná aspoň jedna druhá mocnina celého čísla. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 5

Daná je kružnica $k(O, r)$ a bod A, pričom $|AO| = d > r$. Dotyčnice z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch B, C. Trojuholníku ABC je vpísaná kružnica. Vyjadrite jej polomer ρ pomocou daných dĺžok d a r. (*Šárka Gergelitsová*)

C – I – 6

Na kruhovom opevnení hradu je niekoľko veží. Do nich sa rozmiestni päť čiernych a päť červených rytierov (v každej veži ich môže byť viac a môžu mať rôzne farby) a začnú strážiť. Po uplynutí každej hodiny prejdú všetci čierni rytieri do susednej veže v smere chodu hodinových ručičiek a všetci červení rytieri prejdú do susednej veže v opačnom smere. Dokážte nasledujúce tvrdenie:

a) Ak je veží osem, môžu sa rytieri na začiatku rozmiestniť tak, že počas každej hodiny bude v každej veži aspoň jeden rytier.

b) Ak je veží sedem, niektorú hodinu ostane aspoň jedna veža neobsadená, nech už sa na začiatku rytieri rozmiestnia akokoľvek.

(*Pavel Calábek*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

67. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Patrik Bak, RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Mária Dományová, RNDr. Šárka Gergelitsová, RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Josef Tkadlec
Recenzenti:	Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Redakčná úprava:	RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017