SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

67. ročník, školský rok 2017/2018

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 67. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **4. decembra 2017** (kategória **A**) a do **19. januára 2018** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2018 v Rumunsku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2018 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste alebo septembri 2018 v Poľsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2018 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 67. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	12. 12. 2017	16. 01. 2018	18. – 21. marca 2018
Kategórie B, C	30. 01. 2018	10. 04. 2018	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2017/2018
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár iKS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o iKS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Pali egy táblázat mezőibe felváltva ír karikát és keresztet (kereszttel kezd). Amikor a táblázat teljesen ki van töltve, akkor a végeredményt úgy határozza meg, hogy veszi az $O-X$ különbséget, ahol O azon sorok és oszlopok száma, amelyekben több karika van, mint kereszt, ugyanígy X azon sorok és oszlopok számát jelöli, amelyekben több kereszt van, mint karika.

a) Bizonyítsátok be, hogy egy $2 \times n$-es táblázatban a végeredmény mindig 0.

b) Határozzátok meg az n függvényében azt a lehető legnagyobb végeredményt, amely előállhat egy $(2n+1) \times (2n+1)$-es táblázatban!

(*Josef Tkadlec*)

A – I – 2

Bizonyítsátok be, hogy ha az a és b valós számok összege nagyobb, mint 2, akkor az

$$(a-1)x + b < x^2 < ax + (b-1)$$

egyenlőtlenségrendszernek végtelenül sok x megoldása van a valós számok halmazán!

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 3

A síkban adott két egymást kívülről érintő egységnyi sugarú kör. Tekintsük azokat a téglalapokat és négyzeteket, amelyek tartalmazzák mindkét kört és amelyeknek minden oldala érintője legalább az egyik körnek! Határozzátok meg ezen sokszögek lehető legkisebb és legnagyobb területét! (*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Keressétek meg azt a legnagyobb n természetes számot, amelyre a

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

összeg prímszám! Az $\lfloor x \rfloor$ jelölés azt a legnagyobb egész számot jelöli, amely nem nagyobb, mint x. (*Patrik Bak*)

A – I – 5

Egy $ABCD$ konvex négyszögben $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ACD|$ és $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADC|$. Tegyük fel, hogy a BCD háromszög körülírt körének O középpontja nem esik egybe az A ponttal. Bizonyítsátok be, hogy az OAC szög derékszög! (*Patrik Bak*)

A – I – 6

Keressétek meg az egész számokat tartalmazó M halmaz lehető legnagyobb elemszámát, amelyre fennáll a következő tulajdonság: Az M halmaz tetszőlegesen kiválasztott három különböző eleme között mindig található kettő olyan, amelyek összege egész kitevőjű 2-hatvány. (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Keressétek meg az összes olyan $ax^3 + bx^2 + cx + d$ többtagot, amelyek $2x^2 + 1$-gyel osztva $x + 2$ maradékot, $x^2 + 2$-vel osztva pedig $2x + 1$ maradékot adnak! (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Bizonyítsátok be, hogy minden pozitív valós t számra fennáll a

$$0 \leqq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leqq |t - 1|$$

egyenlőtlenségrendszer! (*Tomáš Jurík*)

B – I – 3

Adott az $ABCD$ rombusz amelynek a BD átlója a rövidebb, s benne a CD oldal azon E belső pontja, amely illeszkedik az ABD háromszög körülírt körére. Határozzátok meg a rombusz A csúcsánál fekvő belső szög nagyságát, ha tudjátok, hogy az ACD és BCE háromszögek köré írt köröknek pontosan egy közös pontja van! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Határozzátok meg azon természetes a, b, c számokból álló számhármasok számát, amelyek kielégítik az

$$a + ab + abc + ac + c = 2017$$

egyenletet! (*Patrik Bak*)

B – I – 5

Adott az $ABCD$ trapéz ($AB \parallel CD$). Tekintsük azt a két egyenest, amelyek a trapézt két egyenlő területű részre osztják és párhuzamosak az AC, illetve BD átlóval! Bizonyítsátok be, hogy ezen két egyenes metszéspontja illeszkedik az AB és CD alapok középpontjait összekötő szakaszra! (*Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Legfeljebb hány elem választható ki az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazból úgy, hogy a kiválasztott számok közül semmelyik kettőnek se legyen a különbsége 2 vagy 5? (*Pavel Calábek*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Keressétek meg azt a legkisebb négyjegyű $\overline{abcd}$ számot, amelyre az

$$\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$$

különbség azonos számjegyekből álló háromjegyű szám! (*Patrik Bak, Mária Dományová*)

C – I – 2

Határozzátok meg azon páronként diszjunkt, egyenlő elem-összegű nemüres halmazok lehető legnagyobb számát, amelyekre felbontható a

a) $\{1, 2, ..., 2017\}$, ill.

b) $\{1, 2, ..., 2018\}$

halmaz! Ha egy halmaz csak egy számot tartalmaz, akkor az elemei összegének ezt a számot tekintjük. (*Patrik Bak*)

C – I – 3

Adott az AB átfogójú ABC derékszögű háromszög, amelyben D jelöli a C csúcshoz tartozó magasságvonal talppontját. Abban a félsíkban, amelynek az AB határegyenese és C a belső pontja, tekintsük azokat az E és F pontokat, amelyekre az EBA és FAB szögek derékszögek, $|BE| = |BD|$ és $|AF| = |AD|$. Bizonyítsátok be, hogy az AE és BF egyenesek metszéspontja illeszkedik a CD szakaszra! (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Keressétek meg azt a legnagyobb n egész számot, amelyre az $n \times n$-es négyzetes táblázat kitölthető az 1-től n^2-ig terjedő természetes számokkal úgy, hogy minden 3×3-as négyzetes résztáblázatban van legalább egy négyzetszám! (*Jaromír Šimša*)

C – I – 5

Adott a $k(O, r)$ körvonal és az A pont, amelyre $|AO| = d > r$. Az A pontból a k körvonalhoz húzott érintők érintési pontjait jelölje B és C. Fejezzétek ki az ABC háromszögbe írt kör ρ sugarát az adott d és r hosszúságok által! (*Šárka Gergelitsová*)

C – I – 6

Egy vár kör alapú erődítménye mentén néhány bástya áll. Ezekben összesen öt fekete és öt vörös lovag helyezkedik el és védi a várat. (Egy bástyában egyidőben több lovag is lehet, és a színük is különbözhet.) Minden óra végén az összes lovag átmegy a szomszédos bástyába, mégpedig a fekete lovagok az óramutató járásával megegyező irányban a vörös lovagok pedig az ellentétes irányban. Bizonyítsátok be a következő állításokat:

a) Ha az erődítménynek nyolc bástyája van, akkor a lovagok az elején elhelyezhetők úgy, hogy minden órában minden bástyában legyen legalább egy lovag.

b) Ha az erődítménynek hét bástyája van, akkor valamelyik órában legalább egy bástya nem lesz elfoglalva, függetlenül attól, hogyan voltak a lovagok elhelyezve az elején.

(*Pavel Calábek*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

67. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Patrik Bak, RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Mária Dományová, RNDr. Šárka Gergelitsová, RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Josef Tkadlec
Recenzenti:	Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017