67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Určte všetky reálne čísla p, pre ktoré má sústava nerovníc*

$$x^2 + (p-1)x + p \leqq 0,$$
$$x^2 - (p-1)x + p \leqq 0$$

aspoň jedno riešenie v obore reálnych čísel. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Vyhovuje každé $p \leqq 0$ (lebo $x = 0$ je vtedy riešením danej sústavy), zatiaľ čo žiadne $p > 0$ nevyhovuje, pretože sčítaním oboch nerovníc dostaneme vzťah $2x^2 + 2p \leqq 0$, ktorý v prípade $p > 0$ zrejme nespĺňa žiadne reálne číslo x.

Iné riešenie. Grafy funkcií $f(x) = x^2 + ux + v$ a $g(x) = x^2 - ux + v$ (paraboly obrátené nahor) sú súmerne združené podľa osi y, lebo $f(x) = g(-x)$ pre každé x. Preto prípadné množiny riešení jednotlivých nerovníc $f(x) \leqq 0$, resp. $g(x) \leqq 0$, ktorými sú, ako je známe, uzavreté intervaly, ktoré môžu degenerovať na jednobodové množiny, sú na číselnej osi x dve súvislé množiny súmerne združené podľa počiatku. Ich prienik je tak neprázdny práve vtedy, keď majú spoločný bod $x = 0$, čo nastane práve vtedy, keď $v = f(0) = g(0) \leqq 0$. Pre danú sústavu to je nerovnosť $p \leqq 0$. (Ako je jasné aj z predchádzajúceho riešenia, od tvaru koeficientu $u = p-1$ výsledok vôbec nezáleží.)

Iné riešenie. Uvažujme množiny $\langle x_2, x_1\rangle$ a $\langle x_4, x_3\rangle$ všetkých riešení prvej, resp. druhej nerovnice, pričom

$$x_{1,2} = \frac{1-p \pm \sqrt{D}}{2} \quad \text{a} \quad x_{3,4} = \frac{p-1 \pm \sqrt{D}}{2},$$

pritom $D = (p-1)^2 - 4p$ a oba intervaly (aspoň ako jednoprvkové množiny) existujú práve vtedy, keď $D \geqq 0$, čiže $p \in (-\infty, 3-2\sqrt{2}\rangle \cup \langle 3+2\sqrt{2}, \infty)$ (také p ďalej nazývame prípustné). Tieto intervaly majú neprázdny prienik práve vtedy, keď platí $x_1 \geqq x_4$ a zároveň $x_3 \geqq x_2$. Nutnosť tejto podmienky vyplýva z nerovností $x_1 \geqq x_0 \geqq x_2$ a $x_3 \geqq x_0 \geqq x_4$ pre bod x_0 z prieniku oboch intervalov. Naopak z nerovností $x_1 \geqq x_4$ a $x_3 \geqq x_2$ vyplýva, že pre čísla $a = \max(x_2, x_4)$ a $b = \min(x_1, x_3)$ platí $a \leqq b$, takže prienikom skúmaných intervalov je neprázdna množina všetkých x, pre ktoré $a \leqq x \leqq b$.

Nerovnosť $x_1 \geqq x_4$ platí práve vtedy, keď $\sqrt{D} \geqq p-1$, čo spĺňajú práve všetky prípustné $p \leqq 1$, zatiaľ čo druhá nerovnosť $x_3 \geqq x_2$ platí práve vtedy, keď $\sqrt{D} \geqq 1-p$, čo spĺňajú práve všetky prípustné $p \notin (0, 1)$. Obe podmienky tak spĺňajú práve všetky $p \leqq 0$ (každé z nich je prípustné). Riešenie je hotové.

Dodajme, že kľúčové nerovnosti $\sqrt{D} \geqq p-1$ a $\sqrt{D} \geqq 1-p$ môžeme zapísať jedinou nerovnosťou $\sqrt{D} \geqq |p-1|$. Z toho vzhľadom na $D = (p-1)^2 - 4p$ hneď vidíme, že hľadané p sú práve všetky nekladné čísla (pre ne zrejme platí $D \geqq 0$, takže určovanie množiny všetkých prípustných p bolo vlastne zbytočné).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 4 body za dôkaz, že žiadne $p > 0$ nevyhovuje; 2 body za dôkaz, že každé $p \leqq 0$ vyhovuje. Neúplné riešenia: 2 body za pozorovanie, že grafy dvoch kvadratických funkcií na ľavých stranách sú súmerne združené podľa osi y; 1 bod za správnu odpoveď (bez zdôvodnenia). Pri postupe z tretieho riešenia dajte 1 bod za výpis intervalov riešenia každej z oboch nerovníc a za určenie hodnôt p, pre ktoré sa jedná o neprázdne množiny. Ďalej potom dajte po 2 bodoch za vyriešenie každej z podmienok $x_1 \geqq x_4$, $x_3 \geqq x_2$ a 1 bod za dokončenie.

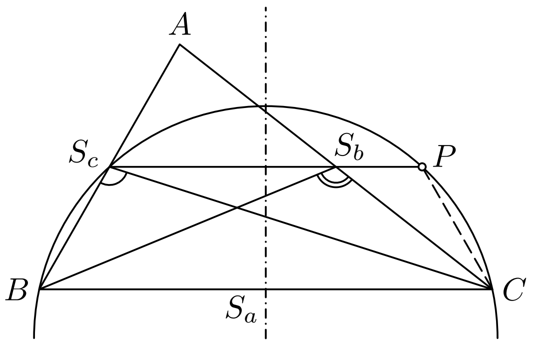
2. *V trojuholníku ABC označme postupne S_b, S_c stredy strán AC, AB. Dokážte, že ak $|AB| < |AC|$, tak $|\angle BS_cC| < |\angle BS_bC|$.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Najskôr pripomeňme známy dôsledok tvrdenia o kružnicovom oblúku ako množine bodov významnej vlastnosti: *Ak ležia body X a Y vnútri jednej polroviny s hraničnou priamkou BC, tak nerovnosť $|\angle BXC| < |\angle BYC|$ platí práve vtedy, keď bod Y leží vnútri kruhového odseku určeného úsečkou BC a kružnicovým oblúkom BXC.*

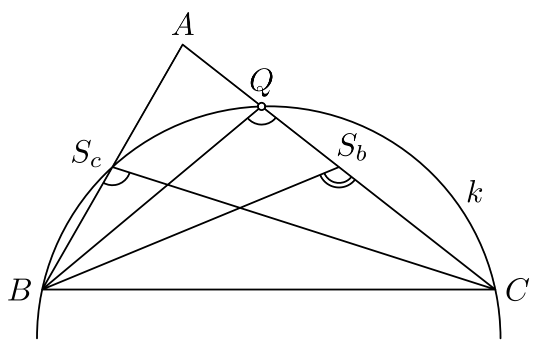
Našou úlohou je teda ukázať, že za predpokladu $|AB| < |AC|$ leží bod S_b vnútri odseku určeného kružnicovým oblúkom BS_cC.

Ako je známe, stredná priečka S_bS_c trojuholníka ABC leží na priamke, ktorá je rovnobežná so stranou BC, a tá preto vytne na kružnicovom oblúku BS_cC takú tetivu S_cP, ktorá má so stranou BC spoločnú os (obr. 1). Ukážeme, že bod S_b je vnútorným bodom tetivy S_cP (a nie bodom jej predĺženia za krajný bod P). Na to treba (a stačí) overiť nerovnosť $|\angle BCA| < |\angle BCP|$. Tú môžeme vďaka zhodnosti súmerne združených uhlov BCP a CBA prepísať ako nerovnosť $|\angle BCA| < |\angle CBA|$, ktorá je, ako vieme, dokonca ekvivalentná s predpokladom $|AB| < |AC|$ zo zadania úlohy.

Poznámka. Poznatok, že bod S_b je vnútorným bodom tetivy S_cP, možno tiež dokázať zistením, že bod S_b má od osi strany BC menšiu vzdialenosť ako bod S_c. Tieto dve vzdialenosti sú dĺžkami prvých odvesien dvoch zrejmých pravouhlých trojuholníkov so spoločnou druhou odvesnou, ktorá má krajný bod v strede S_a úsečky BC, takže vďaka Pytagorovej vete máme vlastne dokázať nerovnosť $|S_aS_b| < |S_aS_c|$ pre dĺžky oboch prepôn. Tie však sú strednými priečkami trojuholníka ABC, takže platí $|S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|$ a $|S_aS_c| = \frac{1}{2}|AC|$, a tak sa opäť dostávame k podmienke $|AB| < |AC|$ zo zadania.



Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Bod A zrejme leží vo vonkajšej oblasti kružnice k opísanej trojuholníku BS_cC. Má teda ku kružnici k kladnú mocnosť m danú vzťahom

$$m = |AS_c| \cdot |AB| = \frac{|AB|^2}{2}.$$

Vďaka tomu vieme, že na kružnici k taktiež leží taký bod Q polpriamky AC, ktorý má od jej počiatku A vzdialenosť určenú rovnosťou $|AQ| \cdot |AC| = m$ (vo všeobecnom prípade nie je vylúčené, že $|AQ| \geqq |AC|$). Za nášho predpokladu $|AB| < |AC|$ však platí

$$|AQ| = \frac{m}{|AC|} = \frac{|AB|^2}{2|AC|} < \frac{|AC|^2}{2|AC|} = \frac{|AC|}{2} = |AS_b| < |AC|,$$

takže body A, Q, S_b, C ležia na priamke v tomto poradí (obr. 2). Bod S_b je tak vnútorným bodom tetivy CQ kružnice k, čo podľa poznatku (pripomenutého v úvode predchádzajúceho riešenia) už znamená, že $|\measuredangle BS_cC| < |\measuredangle BS_bC|$.

Iné riešenie. Označme S_a stred úsečky BC a o jej os. Akonáhle si uvedomíme, že vďaka predpokladu $|AB| < |AC|$ má bod S_b menšiu vzdialenosť od osi o ako bod S_c, vyplýva tvrdenie úlohy z nasledujúceho pozorovania: Pre ľubovoľný bod X na priamke S_bS_c (kolmej na os o) klesá veľkosť uhla BXC so vzdialenosťou d bodu X od osi o. Namiesto už využitej geometrickej argumentácie to overíme trigonometrickým výpočtom.

Označme v vzdialenosť priamky S_bS_c od strany BC, d vzdialenosť bodu X od osi o a $a = |BC|$. Z kosínusovej vety pre trojuholník BCX tak máme

$$a^2 = |BX|^2 + |CX|^2 - 2|BX||CX| \cos |\measuredangle BXC|.$$

Ak využijeme navyše to, že trojuholník BCX má od vzdialenosti d nezávislý obsah $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{2}|BX||CX| \sin |\measuredangle BXC|$, dostaneme po jednoduchej úprave

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} |\measuredangle BXC| &= \frac{|BX|^2 + |CX|^2 - a^2}{4S} = \\ &= \frac{(d + \frac{1}{2}a)^2 + v^2 + (d - \frac{1}{2}a)^2 + v^2 - a^2}{4S} = \frac{4d^2 + 4v^2 - a^2}{4av}.\end{aligned}$$

To je zjavne rastúca funkcia parametra d, zatiaľ čo funkcia cotg je na intervale $(0°, 180°)$ klesajúca.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za zavedenie tetivy S_cP alebo CQ, ďalšie 2 body za zdôvodnenie, prečo je bod S_b vnútorným bodom zavedenej tetivy a 1 bod za dokončenie dôkazu odkazom na kružnicový oblúk (alebo kruhový odsek) ako množinu bodov potrebnej vlastnosti.

Neúplné riešenie: Len za zdôvodnenie, že bod S_b je bližšie k osi strany BC ako bod S_c, dajte 3 body. Stroho zdôvodnené postupy pozostávajúce len z platných tvrdení hodnoťte benevolentne. Naproti tomu za postup využívajúci (všeobecne neplatné) tvrdenie „V lichobežníku BCS_bS_c platí $|BS_c| < |CS_b|$, takže $|\measuredangle BS_cC| < |\measuredangle BS_bC|$" dajte nanajvýš 1 bod.

---

3. *Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako súčet $X + O$, pričom X je počet riadkov obsahujúcich viac krížikov ako krúžkov a O je počet stĺpcov obsahujúcich viac krúžkov ako krížikov. Určte najvyššie možné skóre dosiahnuteľné pre tabuľku $(2n + 1) \times (2n + 1)$ v závislosti od prirodzeného čísla n.* (Josef Tkadlec)

Riešenie. Chceme, aby krížiky prevažovali v čo najviac riadkoch a krúžky v čo najviac stĺpcoch.

Všetkých políčok v tabuľke je nepárny počet $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, krížikov vo vyplnenej tabuľke je o jeden viac ako krúžkov, takže ich je $2n^2 + 2n + 1$, zatiaľ čo krúžkov iba $2n^2 + 2n$. Je tiež jasné, že tabuľka akokoľvek vyplnená uvedenými počtami krížikov a krúžkov je výsledkom, ktorý Pavol môže svojim postupom dosiahnuť.

Najskôr dokážeme, že krížiky nemôžu prevažovať vo všetkých riadkoch. Keby krížiky prevažovali v každom riadku, muselo by ich byť aspoň $(2n + 1)(n + 1) = 2n^2 + 3n + 1$. Krížikov v tabuľke je však iba $2n^2 + 2n + 1 = 2n(2n + 1) + 1$, môžu teda prevažovať nanajvýš v $2n$ riadkoch.

Rovnakým argumentom dokážeme, že krúžky môžu prevažovať nanajvýš v $2n$ stĺpcoch. Najvyššie dosiahnuteľné skóre je preto $2n + 2n = 4n$.

V druhej časti riešenia dokážeme, že skóre $4n$ sa dá pre každé prirodzené číslo n dosiahnuť. Stačí rozmiestniť krížiky do ľavých $n+1$ stĺpcov prvých n riadkov, pravých $n+1$ stĺpcov ďalších n riadkov a prostredného políčka spodného riadku (krúžky potom umiestnime do všetkých ostatných políčok). Situáciu pre $n = 3$ znázorňuje obr. 3. Ľahko overíme, že krížikov je celkom $(n+1)n + (n+1)n + 1 = 2n^2 + 2n + 1$, teda správny počet (takže aj na krúžky ostáva správny počet políčok), a že krížiky prevažujú vo všetkých riadkoch okrem posledného, zatiaľ čo krúžky prevažujú vo všetkých stĺpcoch okrem prostredného.

×	×	×	×	○	○	○
×	×	×	×	○	○	○
×	×	×	×	○	○	○
○	○	○	×	×	×	×
○	○	○	×	×	×	×
○	○	○	×	×	×	×
○	○	○	×	○	○	○

Obr. 3

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za dôkaz, že skóre nemôže byť vyššie ako $4n$; 2 body za opis vyplnenia, ktoré pre každé (všeobecné) n vedie na skóre $4n$; 1 bod za uvedenie, že opísané vyplnenie obsahuje správny celkový počet krížikov a krúžkov. Neúplné riešenie: 1 bod za správnu odpoveď (bez zdôvodnenia).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 15. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Vojtech Bálint
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017