67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

---

1. *Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel $X - O$, pričom X je súčet druhých mocnín počtov krížikov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch a O je súčet druhých mocnín počtov krúžkov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch. Určte všetky možné hodnoty skóre dosiahnuteľné pre tabuľku 67×67.* (Josef Tkadlec)

Riešenie. Označme $n = 67$ rozmer tabuľky. Keďže číslo n je nepárne, je krížikov v tabuľke celkom $k = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$. Príspevok riadku obsahujúceho a krížikov a $n - a$ krúžkov do celkového skóre je $a^2 - (n - a)^2 = 2na - n^2$.

Keďže súčet všetkých hodnôt a pre jednotlivé riadky je rovný vyššie určenému číslu k, sčítaním cez všetkých n riadkov získavame, že ich celkový príspevok je

$$2nk - n \cdot n^2 = \frac{n^2 + 1}{2} \cdot 2n - n^3 = n.$$

To isté platí aj pre stĺpce, takže výsledné skóre je vždy rovné $n + n = 2n = 134$.

Iné riešenie. Uvažujme tabuľku $n \times n$ vyplnenú úplne ľubovoľne krúžkami a krížikmi. Dokážeme, že prepísaním ľubovoľného krúžku na krížik sa skóre zvýši o $4n$, a keďže pre tabuľku vyplnenú samými krúžkami je skóre rovné $-2n^3$ a Pavlom vyplnená tabuľka obsahuje $\frac{1}{2}(n^2+1)$ krížikov, bude výsledné skóre vždy rovné $-2n^3 + 4n \cdot \frac{1}{2}(n^2+1) = 2n$.

Označme prepisované políčko P a predpokladajme, že v stĺpci a riadku obsahujúcom P sa nachádza s, resp. r krížikov. Príspevok tohto riadku a stĺpca sa tak zmení z pôvodného

$$A = r^2 - (n - r)^2 + s^2 - (n - s)^2 = 2n(r + s) - 2n^2$$

na

$$B = (r + 1)^2 - (n - r - 1)^2 + (s + 1)^2 - (n - s - 1)^2 = 2n(r + 1 + s + 1) - 2n^2,$$

zatiaľ čo príspevok ostatných riadkov a stĺpcov sa nezmení. Keďže $B - A = 4n$, sme hotoví.

Iné riešenie. Ak vyplní Pavol tabuľku 67×67 tak, že sa krížiky nachádzajú práve vo všetkých políčkach prvých 33 riadkov a v prvých 34 políčkach 34. riadku, ľahko vyjadríme

$$X = 33 \cdot 67^2 + 34^2 + 34 \cdot 34^2 + 33 \cdot 33^2$$

a

$$O = 33^2 + 33 \cdot 67^2 + 34 \cdot 33^2 + 33 \cdot 34^2.$$

Pre takto vyplnenú tabuľku nám vyjde $X - O = 2 \cdot (34^2 - 33^2) = 134$.

Teraz dokážeme, že hodnota skóre nezávisí od toho, v ktorých políčkach krížiky sú. Na to stačí dokázať, že hodnota skóre sa nezmení, keď prehodíme krížik s krúžkom ležiacim v tom istom riadku alebo v tom istom stĺpci. Opakovaným prevádzaním takých operácií možno totiž z každej Pavlom vyplnenej tabuľky získať tabuľku vyplnenú ako vo vyššie opísanom prípade.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že prehadzované znaky ležia v tom istom riadku, a označme s_x, s_o stĺpce, v ktorých leží prehadzovaný krížik, resp. krúžok. Napokon označme a, b počet (ostatných) krížikov v stĺpcoch s_x, s_o. Príspevok stĺpca s_x do výsledného skóre sa zmení z pôvodného $A_1 = (a+1)^2 - (n-a-1)^2$ na nové $A_2 = a^2 - (n-a)^2$, príspevok stĺpca s_o sa zmení z pôvodného $B_1 = b^2 - (n-b)^2$ na nové $B_2 = (b+1)^2 - (n-b-1)^2$ a príspevky ostatných stĺpcov a riadkov sa nezmenia. Výsledné skóre sa tak zmení o hodnotu

$$A_2 - A_1 + B_2 - B_1 = -2a - 1 - 2(n-a) + 1 + 2b + 1 + 2(n-b) - 1 = -2n + 2n = 0.$$

Tým sme hotoví.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Neúplné riešenie: Po 1 bode dajte za tvrdenie, že skóre bude vždy 134 (bez zdôvodnenia), a za opísaný výpočet skóre pre nejaké konkrétne vyplnenie tabuľky. Pri treťom riešení nestrhávajte body za absenciu formálneho dôkazu, že z jednej vyplnenej tabuľky možno postupným prehadzovaním krížikov a krúžkov dostať každú inú vyplnenú tabuľku.

---

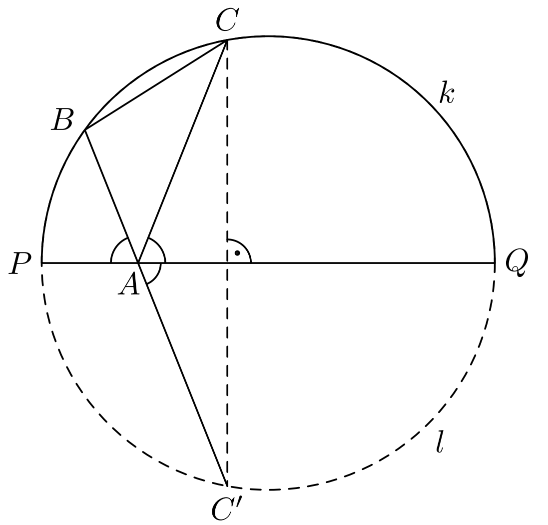
2. *Daná je polkružnica k nad priemerom PQ. Na nej je zostrojená tetiva BC pevnej dĺžky d, ktorej krajné body sú rôzne od bodov P, Q. Lúč vyslaný z bodu B sa od priemeru PQ odrazí do bodu C v takom bode A, že $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle QAC|$. Dokážte, že veľkosť uhla BAC nezávisí od polohy tetivy BC na polkružnici.*

(Šárka Gergelitsová)

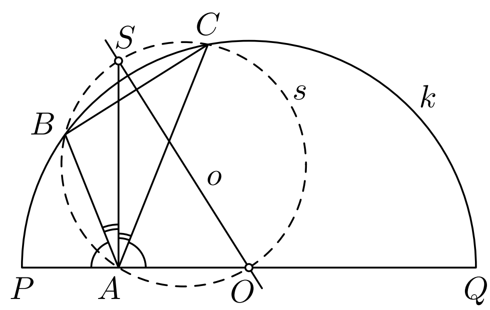
Riešenie. Označme l polkružnicu, ktorá je obrazom polkružnice k v osovej súmernosti podľa priemeru PQ, a zostrojme bod C' ako obraz bodu C v tejto osovej súmernosti. Bod C' zrejme leží na l. Z vlastností osovej súmernosti ďalej vyplýva $|\measuredangle QAC'| = |\measuredangle QAC|$, a keďže $|\measuredangle QAC| = |\measuredangle PAB|$, ležia body B, A, C' na jednej priamke (obr. 1). Zároveň je trojuholník $C'CA$ rovnoramenný, takže pre jeho vonkajší uhol BAC platí

$$|\measuredangle BAC| = |\measuredangle AC'C| + |\measuredangle ACC'| = 2|\measuredangle BC'C|.$$

Tetiva BC kružnice $k \cup l$ má pevnú dĺžku, preto má aj príslušný obvodový uhol $BC'C$ konštantnú veľkosť. Hodnota $|\measuredangle BAC| = 2|\measuredangle BC'C|$ tak nezávisí od polohy tetivy BC.



Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Označme O stred priemeru PQ polkružnice k. Dokážeme, že bod O vždy leží na kružnici s opísanej trojuholníku ABC (obr. 2). A keďže celý priemer PQ leží v polrovine určenej tetivou BC, vyplynie z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou BC rovnosť $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BOC|$, čo je hodnota, ktorá od polohy tetivy BC nezávisí. Tým bude tvrdenie úlohy dokázané.

Uvedomme si, že bod O leží na osi o úsečky BC, na ktorej leží aj stred S toho oblúka BC kružnice s, ktorý neprechádza bodom A. Priamka OS tak obsahuje priemer kružnice s s jedným krajným bodom S. Podľa Tálesovej vety bude jeho druhým krajným bodom práve bod O priamky PQ (a náš dôkaz tak bude ukončený), keď overíme, že $SA \perp PQ$.

Podľa zadania sú zhodné uhly BAP a CAQ, vďaka zhodnosti tetív SB a SC kružnice s sú však zhodné aj uhly BAS a CAS, takže sú zhodné aj uhly SAP a SAQ, sú to teda naozaj dva pravé uhly, ako sme sľúbili overiť.

Poznámka. Dodajme, že bod A na PQ je rovnosťou zo zadania jednoznačne určený. Stačí preto ukázať, že bod A možno nájsť ako priesečník kružnice s opísanej (rovnoramennému) trojuholníku OBC s priamkou PQ: Ak je BC rovnobežné s PQ, je zrejme $A = O$; v opačnom prípade existuje ďalší priesečník $X \neq O$ kružnice s s priamkou PQ a pre ten platí, že v ňom vztýčená kolmica na PQ prechádza stredom S oblúka BC, je teda osou uhla BXC, takže naozaj $X = A$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho pri prvom postupe dajte 2 body za zdôvodnenie, že bod C' leží na priamke AB (alebo B' na AC), 2 body za vyjadrenie $|\measuredangle BAC|$ pomocou $|\measuredangle BC'C|$ alebo $|\measuredangle BOC|$, 2 body za dokončenie dôkazu. Pri druhom postupe dajte 4 body za dôkaz toho, že bod O vždy leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC či bod A na kružnici opísanej trojuholníku OBC a 2 body za dokončenie dôkazu.

---

3. *Sú dané dve rôzne kladné reálne čísla a, b. Uvažujme rovnicu*

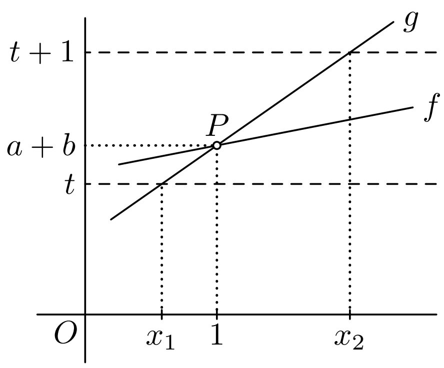
$$\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor bx + a \rfloor,$$

pričom $\lfloor y \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje y. Dokážte, že existuje interval dĺžky aspoň

$$\frac{1}{\max\{a, b\}},$$

ktorého všetky body sú riešeniami danej rovnice. (Patrik Bak)

Riešenie. Uvažujme lineárne funkcie $f(x) = ax + b$ a $g(x) = bx + a$. Keďže čísla a, b sú kladné a rôzne, sú ich grafy dve rôzne priamky s kladnou smernicou a obe funkcie f a g sú rastúce. A keďže $f(1) = g(1) = a + b$, je bod $P[1, a + b]$ priesečníkom oboch priamok (obr. 3).



Obr. 3

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $b > a$, takže priamka určená funkciou g je „strmšia“ ako priamka určená funkciou f. Inými slovami, pre $x < 1$ je $f(x) > g(x)$, zatiaľ čo pre $x > 1$ je $f(x) < g(x)$. To inak vyplýva aj z algebraického vyjadrenia

$$f(x) - g(x) = (ax + b) - (bx + a) = (b - a)(1 - x).$$

Označme $t = \lfloor a+b \rfloor$ a nájdime čísla $x_1 \leqq 1 < x_2$ také, že $g(x_1) = t$ a $g(x_2) = t+1$ (t. j. $x_1 = (t - a)/b$ a $x_2 = (t + 1 - a)/b$). Tvrdíme, že interval $\langle x_1, x_2)$, ktorý obsahuje číslo 1, má všetky požadované vlastnosti.

Najskôr ukážeme, že pre každé $x \in \langle x_1, x_2)$ platí

$$t \leqq f(x) < t + 1 \quad \text{a} \quad t \leqq g(x) < t + 1, \tag{1}$$

čo povedie k záveru, že x je riešením zadanej rovnice, pretože obe jej strany potom budú rovné číslu t.

Naozaj, pre každé také x platí buď $x_1 \leqq x \leqq 1$, alebo $1 < x < x_2$. Vďaka nerovnostiam medzi hodnotami f a g v prvom prípade platí

$$t = g(x_1) \leqq g(x) \leqq f(x) \leqq f(1) = a + b < t + 1,$$

v druhom prípade potom je

$$t \leqq a + b = f(1) < f(x) < g(x) < g(x_2) = t + 1,$$

takže (1) platí v oboch prípadoch. Všetky čísla z intervalu $\langle x_1, x_2)$ sú tak riešením zadanej rovnice. Navyše z rovností

$$1 = t + 1 - t = bx_2 + a - (bx_1 + a) = b(x_2 - x_1)$$

vyplýva

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{\max\{a, b\}},$$

teda interval $\langle x_1, x_2)$ má aj požadovanú dĺžku.

Z nášho výsledku vyplýva, že podmienkam úlohy vyhovuje aj interval (x_1, x_2).

Iné riešenie. Pre ľubovoľne zvolené celé číslo t má rovnica $\lfloor ax+b\rfloor = t$ za riešenia práve tie x, pre ktoré platí $t \leqq ax+b < t+1$. Také x vďaka podmienke $a > 0$ tvoria interval

$$I_1 = \Big\langle \frac{t-b}{a}, \frac{t-b+1}{a}\Big),$$

ktorý má dĺžku $1/a$. Podobne všetky riešenia rovnice $\lfloor bx+a\rfloor = t$ tvoria interval

$$I_2 = \Big\langle \frac{t-a}{b}, \frac{t-a+1}{b}\Big)$$

dĺžky $1/b$. V prípade $a < b$ tak stačí dokázať existenciu celého t, pre ktoré má interval $I_1 \cap I_2$ rovnakú dĺžku $1/b$ ako kratší interval I_2. To nastane práve vtedy, keď bude platiť $I_2 \subset I_1$, čo možno vyjadriť dvojicou nerovností medzi krajnými bodmi oboch intervalov v tvare

$$\frac{t-b}{a} \leqq \frac{t-a}{b} \quad \text{a} \quad \frac{t-a+1}{b} \leqq \frac{t-b+1}{a}.$$

Ľahko sa presvedčíme, že za nášho predpokladu $0 < a < b$ obe nerovnosti platia práve vtedy, keď

$$a+b-1 \leqq t \leqq a+b.$$

Vždy teda vyhovuje $t = \lfloor a+b\rfloor$; ak je číslo $a+b$ celé, vyhovuje aj $t = a+b-1$. Vzhľadom na symetriu platí predchádzajúca veta aj v opačnej situácii, keď $a > b$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, v prípade drobných nedostatkov strhnite 1 bod. Pri hodnotení čiastočných riešení dajte nasledujúce body (čiastkové body podľa prvého a druhého riešenia sa nesčítajú!).

Pri postupe podľa prvého riešenia 1 bod za konštatovanie, že vyhovuje $x = 1$, čiže že sa uvažované priamky pretínajú v bode $[1, a+b]$, 1 bod za rozhodnutie, že budeme hľadať iba tie x, pre ktoré sa obe strany rovnice rovnajú hodnote $t = \lfloor a+b\rfloor$, 1 bod za výpočet krajných bodov x_1, x_2 pri strmšej funkcii pomocou a, b a t (postačuje pre jeden z prípadov $a < b$, $a > b$), ďalší 1 bod za dôkaz, že interval s týmito krajnými bodmi má požadovanú dĺžku $1/\max(a,b)$ a 2 body za algebraické alebo grafické overenie, že na tomto (polouzavretom) intervale sa obe strany rovnice rovnajú. V prípade postupu podľa druhého riešenia dajte 2 body za nájdenie intervalov, v ktorých sú funkcie $\lfloor ax+b\rfloor$ a $\lfloor bx+a\rfloor$ rovné konštante t, 1 bod za dôkaz, že kratšie z nich majú požadovanú dĺžku $1/\max(a,b)$, 1 bod za správny zápis inklúzie a 2 body za dopočítanie $t = \lfloor a+b\rfloor$.

Ak riešiteľ nebude postupovať v dostatočnej všeobecnosti vzhľadom na reálne parametre a a b, dajte nanajvýš 1 bod za (úplný) dôkaz pre jednu konkrétnu dvojicu (a,b) a nanajvýš 3 body za (úplný) dôkaz pre nekonečne veľa dvojíc (a,b) (napríklad pre dvojice $a=1$, $b=m>1$, pričom m je ľubovoľné prirodzené číslo).

---

4. *Rozhodnite, či existujú kladné celé čísla n a k také, že*

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla. (*Ján Mazák*)

Riešenie. Také čísla neexistujú. Predpokladajme naopak, že n a k sú kladné celé čísla také, že

$$\frac{n}{11^k - n} = a^2$$

pre nejaké kladné celé číslo a. Po jednoduchej úprave dostávame

$$n(a^2+1) = a^2 \cdot 11^k.$$

Keďže čísla a^2 a a^2+1 sú pre každé $a \geqq 1$ nesúdeliteľné, musí byť a^2+1 deliteľom čísla 11^k, a to deliteľom netriviálnym, pretože $a^2+1>1$. To znamená, že $a^2+1 = 11^t$ pre nejaké $1 \leqq t \leqq k$, čiže číslo a^2 musí po delení 11 dávať zvyšok 10. Ľahko však overíme, že žiadna druhá mocnina celého čísla zvyšok 10 po delení 11 nedáva: to samozrejme stačí overiť iba pre čísla $0, 1, \ldots, 10$. Ich druhé mocniny dávajú postupne zvyšky $0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1$, čím sme dospeli k sľúbenému sporu.

Žiadne také čísla n a k neexistujú.

Poznámka. Keďže $(11-r)^2 = 11 \cdot (11-2r) + r^2$, dávajú druhé mocniny čísel r a $11-r$ po delení 11 rovnaké zvyšky, takže posledné tvrdenie stačilo overiť iba pre čísla $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za dôkaz, že stačí riešiť rovnicu $a^2+1 = 11^t$ pre $t \geqq 1$; 2 body za dôkaz, že žiadna druhá mocnina celého čísla nedáva zvyšok 10 po delení 11; 1 bod za dokončenie dôkazu. Len za uvedenie správnej odpovedi (bez akéhokoľvek zdôvodnenia) neudeľujte žiadny bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Vojtech Bálint
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018