67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite najväčšie trojciferné číslo, z ktorého po vyškrtnutí ľubovoľnej cifry dostaneme prvočíslo.* (Ján Mazák)

Riešenie. Hľadáme najväčšie medzi číslami $\overline{abc}$, pre ktoré všetky tri čísla $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ aj $\overline{bc}$ sú prvočísla. Dvojciferné prvočísla $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ sú nepárne, preto ich posledné cifry musia byť nepárne. Navyše medzi nimi nemôže byť ani cifra 5, inak by príslušné dvojciferné číslo bolo deliteľné piatimi. Stačí teda ďalej skúmať iba cifry b a c z množiny $\{1, 3, 7, 9\}$.

Cifru a chceme čo najväčšiu, budeme teda postupne prechádzať možnosti počínajúc hodnotou $a = 9$, kým nenájdeme riešenie.

Pre $a = 9$ sú čísla $91 = 7 \cdot 13$, $93 = 3 \cdot 31$, $99 = 3 \cdot 33$ zložené, jedine 97 je prvočíslo, a tak ostáva jediná možnosť $b = c = 7$. V tom prípade je však číslo $\overline{bc} = 77 = 7 \cdot 11$ zložené. Cifrou 9 teda hľadané číslo začínať nemôže.

Podobne pre $a = 8$ vylúčime možnosti $b, c \in \{1, 7\}$, pretože $81 = 3 \cdot 27$ a $87 = 3 \cdot 29$. Ostáva tak iba možnosť $b, c \in \{3, 9\}$. V tom prípade je však číslo $\overline{bc}$ deliteľné tromi.

Ak hľadané číslo začína cifrou $a = 7$, nemôže byť $b = 7$ ani $c = 7$, zato čísla 71, 73 aj 79 sú naspospol prvočísla. Zo zvyšných kandidátov 1, 3, 9 na cifry b, c možno vytvoriť štyri dvojciferné prvočísla 31, 19, 13, 11 a najväčšie z nich je číslo 31. Vidíme teda, že číslo 731 spĺňa podmienky úlohy a žiadne väčšie také trojciferné číslo neexistuje.

Hľadané najväčšie trojciferné číslo je 731.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vylúčenie možností $b, c \in \{2, 4, 6, 8\}$ dajte 1 bod, za vylúčenie $b = 5$ a $c = 5$ dajte ďalší bod. Za vylúčenie každej z možností $a = 9$ a $a = 8$ dajte po 1 bode. Posledné 2 body dajte za rozobranie možnosti $a = 7$ a nájdenie správneho riešenia. Systematické prehľadávanie možností od najväčšieho trojciferného čísla bez nájdenia správneho riešenia ohodnoťte nanajvýš 4 bodmi.

---

2. *Skúmajme, či sa dá štvorcová tabuľka $n \times n$ vyplniť prirodzenými číslami od 1 do n^2 tak, aby v každej štvorcovej časti 2×2 bol zapísaný aspoň jeden násobok piatich.*

a) Dokážte, že pre žiadne párne n sa to nedá.

b) Nájdite najväčšie nepárne n, pre ktoré sa to dá. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Pre párne $n = 2k$ rozdeľme tabuľku na neprekrývajúce sa štvorcové časti 2×2 – tých bude presne k^2 a v každej z nich má byť zapísaný iný násobok piatich. Na to ale potrebujeme k^2 násobkov piatich, z ktorých najmenšie sú čísla 5, 10, …, $5k^2$, prinajmenšom posledné uvedené však medzi prirodzenými číslami od 1 do $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ nenájdeme. Tým je časť a) dokázaná.

Pre nepárne $n = 2k + 1$ vyberieme v tabuľke podobným spôsobom k^2 neprekrývajúcich sa štvorcových častí 2×2 – napríklad tak, že vynecháme jej posledný riadok a posledný stĺpec. Aby sme mohli tabuľku vyplniť požadovaným spôsobom, musí opäť platiť $5k^2 \leqq n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, čiže $k^2 \leqq 4k + 1$. Posledná nerovnosť ale nemôže platiť pre $k \geqq 5$, lebo pre také k je naopak $k^2 \geqq 5k > 4k + 1$.

Najväčšie nepárne n, pre ktoré máme medzi číslami od 1 do n^2 dostatok násobkov piatich, je teda $n = 9$. Všetkých 16 násobkov piatich vpíšeme do jednotlivých častí 2×2, pričom zvyšné čísla potom vpíšeme do prázdnych políčok ľubovoľne:

	5		10		15		20	
	25		30		35		40	
	45		50		55		60	
	65		70		75		80	

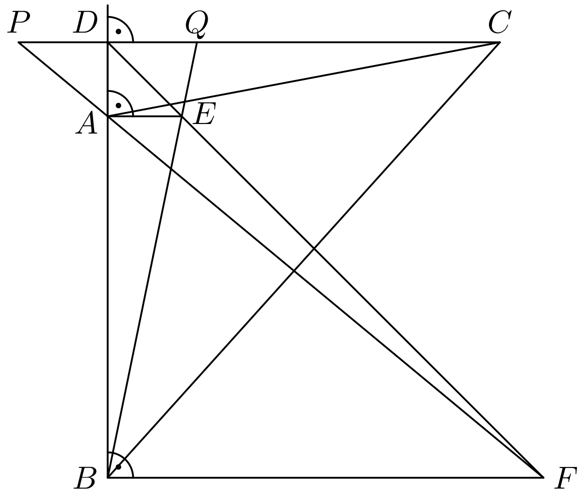
Hľadané najväčšie nepárne n, pre ktoré možno tabuľku vyplniť požadovaným spôsobom, je rovné deviatim.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za myšlienku rozdeliť tabuľku na k^2 neprekrývajúcich sa častí 2×2 dajte 3 body, za dokončenie dôkazu časti a) potom 1 bod, za odvodenie podmienky $n \leqq 9$ v časti b) ďalší bod a bod za uvedenie príkladu vyplnenia.

---

3. *Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole A, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C. Na kolmiciach na AB, ktoré prechádzajú bodmi A a B, zostrojme v polrovine ABC postupne body E a F, pre ktoré platí $|AE| = |AD|$ a $|BF| = |BD|$. Označme napokon P a Q priesečníky priamok AF a BE s priamkou CD. Dokážte, že D je stredom úsečky PQ.* (Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Keďže trojuholník ABC má pri vrchole A tupý uhol, leží bod D zvonka úsečky AB. Z konštrukcie jednotlivých bodov tak vyplýva, že body P a Q ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB (obr. 1).



Obr. 1

Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $ADP \sim ABF$ vyplýva

$$\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|AB|} \quad \text{a odtiaľ} \quad |DP| = \frac{|AD| \cdot |BD|}{|AB|},$$

pričom sme využili rovnosť $|BF| = |BD|$ zo zadania.

Podobne z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $DBQ \sim ABE$ vyplýva

$$\frac{|DQ|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \text{a odtiaľ} \quad |DQ| = \frac{|AD| \cdot |BD|}{|AB|},$$

pričom sme využili druhú rovnosť $|AE| = |AD|$ zo zadania.

Vidíme tak, že dĺžky úsečiek DP a DQ sa rovnajú, a keďže bod D leží vnútri úsečky PQ, je jej stredom, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Zapísanie podobnosti trojuholníkov $ADP \sim ABE$ a $DBQ \sim ABF$ ohodnoťte po jednom bode, ďalšie 2 body dajte za vyjadrenie dĺžok úsečiek $|DP| = |AD| \cdot |BF|/|AB|$ a $|DQ| = |BD| \cdot |AE|/|AB|$ a posledné 2 body dajte za správne využitie rovností zo zadania.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Patrik Bak
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018