2018/2019
68. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 21. januára 2019.*)

1. Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie.
(*Pavel Calábek*)

2. V trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M stred prepony BC a N priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole B s odvesnou AC. Úsečky AM a BN sa pretínajú v bode, ktorý označme K. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka BAK a štvoruholníka $CNKM$. (*Patrik Bak*)

3. *Úpravou* prirodzeného čísla nazveme nasledujúcu operáciu: ak je číslo párne, vydelíme ho dvoma; ak je nepárne, pripočítame k nemu číslo 1.

a) Dokážte, že z ľubovoľného prirodzeného čísla dostaneme po niekoľkých úpravách číslo 1.
b) Pre ktoré z čísel 1, 2, ..., 10^6 budeme potrebovať najväčší počet úprav, kým získame číslo 1?

(*Ján Mazák*)

4. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu
$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$
(*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

5. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD. (*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

6. Konečnú množinu prirodzených čísel nazveme *pekná*, ak na výpis týchto čísel v desiatkovej sústave potrebujeme párny počet každej zo zastúpených cifier. Peknými množinami sú napríklad $\{11, 13, 31\}$, $\{10, 100, 110\}$ a tiež prázdna množina. Určte, koľko je všetkých pekných podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$. (*Patrik Bak*)