SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

68. ročník, školský rok 2018/2019

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 68. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **3. decembra 2018** (kategória **A**) a do **21. januára 2019** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2019 v Spojenom kráľovstve), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2019 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude na prelome augusta a septembra 2019 v ČR).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2019 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 68. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	11. 12. 2018	15. 01. 2019	24. – 27. marca 2019
Kategórie B, C	29. 01. 2019	02. 04. 2019	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2018/2019
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

O postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vieme, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Nájdite všetky hodnoty a_1, pre ktoré je táto postupnosť konštantná.

b) Nech $a_1 = 5$. Určte najväčšie celé číslo neprevyšujúce a_{2018}. (*Vojtech Bálint*)

A – I – 2

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC. Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. (*Patrik Bak*)

A – I – 3

Nájdite všetky nezáporné celé čísla m, n, pre ktoré platí $|4m^2 - n^{n+1}| \leqq 3$. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 4

Daná je množina M prirodzených čísel s n prvkami, pričom n je nepárne číslo väčšie ako jedna. Dokážte, že počet usporiadaných dvojíc (p, q) rôznych prvkov z M takých, že aritmetický priemer čísel p, q je prvkom M, je nanajvýš $\frac{1}{2}(n-1)^2$. (*Martin Panák, Patrik Bak*)

A – I – 5

Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte jeho obvod o, polomer ρ kružnice pripísanej ku strane BC a veľkosť výšky v na túto stranu. Uveďte diskusiu v závislosti od daných dĺžok. (*Patrik Bak*)

A – I – 6

Na hracom pláne je nakreslený pravidelný n-uholník s jedným vrcholom vyznačeným ako pasca. Tom a Jerry hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku Jerry postaví figúrku na niektorý vrchol n-uholníka. V každom kroku potom Tom povie nejaké prirodzené číslo a Jerry posunie figúrku o tento počet vrcholov podľa svojej voľby buď v smere, alebo proti smeru chodu hodinových ručičiek. Nájdite všetky $n \geqq 3$, pri ktorých môže Jerry ťahať figúrkou tak, aby nikdy neskončila v pasci. Ako sa zmení odpoveď, keď je Tom k plánu otočený chrbtom, pozná iba dané n a nevidí, kam Jerry figúrku na začiatku postaví ani kam s ňou v jednotlivých krokoch ťahá? (*Pavel Calábek*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie. (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

V trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M stred prepony BC a N priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole B s odvesnou AC. Úsečky AM a BN sa pretínajú v bode, ktorý označme K. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka BAK a štvoruholníka $CNKM$. (*Patrik Bak*)

B – I – 3

Úpravou prirodzeného čísla nazveme nasledujúcu operáciu: ak je číslo párne, vydelíme ho dvoma; ak je nepárne, pripočítame k nemu číslo 1.

a) Dokážte, že z ľubovoľného prirodzeného čísla dostaneme po niekoľkých úpravách číslo 1.
b) Pre ktoré z čísel $1, 2, \ldots, 10^6$ budeme potrebovať najväčší počet úprav, kým získame číslo 1?

(*Ján Mazák*)

B – I – 4

Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

(*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

B – I – 5

Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD. (*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Konečnú množinu prirodzených čísel nazveme *pekná*, ak na výpis týchto čísel v desiatkovej sústave potrebujeme párny počet každej zo zastúpených cifier. Peknými množinami sú napríklad $\{11, 13, 31\}$, $\{10, 100, 110\}$ a tiež prázdna množina. Určte, koľko je všetkých pekných podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$. (*Patrik Bak*)

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Neznáme číslo je deliteľné práve štyrmi číslami z množiny $\{6, 15, 20, 21, 70\}$. Určte, ktorými.

(*Michal Rolínek*)

C – I – 2

Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG. Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J. Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG.

(*Pavel Calábek*)

C – I – 3

Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(*Patrik Bak*)

C – I – 4

Každé políčko tabuľky 2×13 ofarbíme práve jednou zo štyroch farieb. Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby žiadne dve susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou? (Za susedné považujeme práve tie políčka tabuľky, ktoré majú spoločnú stranu.)

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 5

Nech α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω sú postupne veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C, D, E, F, G, H konvexného osemuholníka $ABCDEFGH$, v ktorom platí

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme ďalej K, L, M, N postupne stredy uhlopriečok AD, CF, EH, GB. Dokážte, že priamky KM a LN sú navzájom kolmé.

(*Josef Tkadlec*)

C – I – 6

Nájdite všetky trojciferné čísla n s tromi rôznymi nenulovými ciframi, ktoré sú deliteľné súčtom všetkých troch dvojciferných čísel, ktoré dostaneme, keď v pôvodnom čísle vyškrtneme vždy jednu cifru.

(*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

68. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Martin Panák, PhD., Mgr. Michal Rolínek, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Josef Tkadlec
Recenzenti:	Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Redakčná úprava:	RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018