2019/2020
69. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

(*Termín odovzdania: v pondelok 20. januára 2020.*)

1. V reálnom obore uvažujme sústavu rovníc

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$
$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálnym parametrom a.

a) Nájdite všetky hodnoty a, pre ktoré má uvedená sústava riešenie.

b) Dokážte, že pre ľubovoľné riešenie (x, y) tejto sústavy platí $x^2 + |y| \geqq 4$. (*Ján Mazák*)

2. Prirodzené číslo n má aspoň 73 dvojciferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60. Uveďte tiež príklad čísla n, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov, vrátane náležitého zdôvodnenia. (*Josef Tkadlec*)

3. Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenie:

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A, O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$.

(*Jaroslav Švrček*)

4. Nech p, q sú dané nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak má rovnica

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

celočíselný koreň, tak má celočíselný koreň aj rovnica

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(*Patrik Bak*)

5. Dané sú kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode T. Ich spoločná vonkajšia dotyčnica sa dotýka kružnice a v bode T_a a kružnice b v bode T_b. Pomocou r_a, r_b vyjadrite pomer polomerov kružníc k_a, k_b opísaných postupne trojuholníkom T_aAT, T_bBT. (*Šárka Gergelitsová*)

6. Figúrka strelca ohrozuje na šachovnici ľubovoľné políčko diagonály, na ktorej strelec stojí. Ak však na niektorom políčku diagonály stojí veža, strelec už políčka za ňou neohrozuje. Určte najväčší možný počet strelcov, ktorých môžeme spolu so štyrmi vežami umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali. (*Ján Mazák*)