

2019/2020
69. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

(Termín odovzdania: v pondelok 2. decembra 2019.)

1. Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b, c > d$ platí

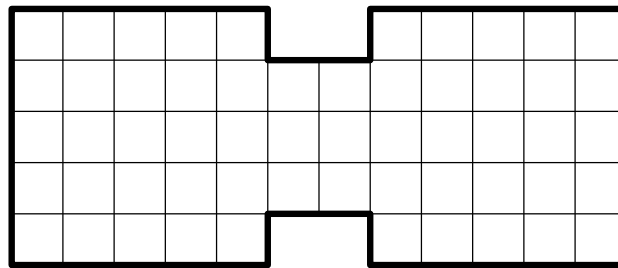
$$a + b > c + d, \quad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$.

(Michal Rolínek)

2. Dokážte, že počet možností, ako sa dá útvar na obrázku vydláždiť dominovými kockami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kocka pokrýva vždy dve políčka susediace stranou.)

(Josef Tkadlec)



Obr. 1

3. Vnútri strán AB a AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body P a Q . Označme R priesečník priamok BQ a CP a p, q, r postupne vzdialenosti bodov P, Q, R od priamky BC . Dokážte, že platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(Patrik Bak)

4. Hovoríme, že podmnožina P množiny $M = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ je *polovičatá*, ak obsahuje 21 prvkov a každé zo 42 čísel v množinách P a $Q = \{7x; x \in P\}$ dáva po delení číslom 43 iný zvyšok. Určte počet polovičatých podmnožín množiny M .

(Josef Tkadlec)

5. V rovine sú dané dva rôzne body O a A . Určte množinu ortocentier všetkých trojuholníkov ABC , pre ktoré je bod O stredom kružnice opísanej. (Pavel Šalom)

6. Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je rovný mocnine niektorého prvočísla.

(Jaromír Šimša)