69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020 *Návodné úlohy domáceho kola kategórie A*

V prvej časti textu pod zadaním každej zo šiestich súťažných úloh nájdete zadania návodných a dopĺňajúcich úloh. Tie isté úlohy aj s riešeniami (resp. odpoveďami a náznakmi riešení či odkazmi na riešenia v našom archíve) nájdete v druhej časti textu.

---

1. *Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí*

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$. (*Michal Rolínek*)

Návodné a dopĺňajúce úlohy:

N1. Súčet kladných čísel a, b je nanajvýš 16. Aká je najväčšia možná hodnota ich súčinu?

N2. Súčin kladných čísel a, b je aspoň 16. Aká je najmenšia možná hodnota ich súčtu?

D1. Reálne čísla a_1, a_2, b_1, b_2 spĺňajú $a_1 > a_2$ a $b_1 > b_2$. Dokážte, že $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$.

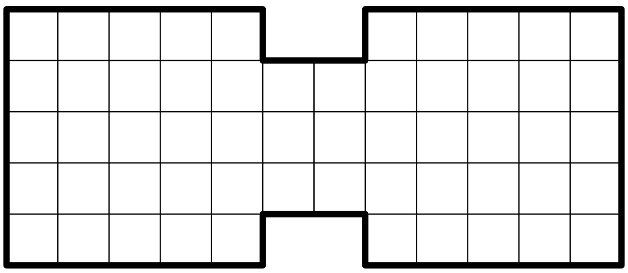
D2. [Permutačná nerovnosť] Nech $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ sú reálne čísla a nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je nejaké poradie pevne daných navzájom rôznych reálnych čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom je výraz

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

maximálny práve vtedy, keď je $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Dokážte.

---

2. *Dokážte, že počet možností, ako sa dá útvar na obr. 1 vydláždiť dominovými kockami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kocka pokrýva vždy dve políčka susediace stranou.)* (*Josef Tkadlec*)



Obr. 1

Návodné a dopĺňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že počet spôsobov, ako možno na šachovnici 8×8 umiestniť maximálny počet strelcov tak, aby sa žiadni dvaja navzájom neohrozovali, je druhá mocnina prirodzeného čísla.

N2. Koľkými spôsobmi možno vydláždiť dominovými kockami šachovnicu 8×8, z ktorej sú odrezané dve protiľahlé rohové políčka?
D1. Koľkými spôsobmi možno pokryť dominovými kockami obdĺžnik 2×10?
D2. Majme šachovnicu 8×8 a ku každej „hrane“, ktorá oddeľuje dve jej políčka, napíšme prirodzené číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako možno celú šachovnicu rozrezať na obdĺžničky 2×1 tak, aby dotyčná hrana bola súčasťou rezu. Určte poslednú cifru súčtu všetkých takto napísaných čísel.
D3. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje útvar, ktorý možno kockami domina vydláždiť presne n spôsobmi.

---

3. *Vnútri strán AB a AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body P a Q. Označme R priesečník priamok BQ a CP a p, q, r postupne vzdialenosti bodov P, Q, R od priamky BC. Dokážte, že platí*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:
N1. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Dokážte, že platí

$$S_{APB} \cdot S_{CPD} = S_{BPC} \cdot S_{DPA}.$$

N2. Dokážte, že v konfigurácii zo zadania úlohy platí $S_{BRC} > S_{PRQ}$.
D1. Body P a Q ležia v tej istej polrovine určenej priamkou l. Ich kolmé priemety na priamku l označme ako P' a Q' a priesečník priamok PQ' a $P'Q$ ako R. Dokážte, že pre vzdialenosti p, q, r bodov P, Q, R od priamky l platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

D2. Daný je bod X vnútri trojuholníka ABC. Dokážte, že ak označíme D priesečník priamok AX a BC, platí

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

D3. [Cevova veta (časť)] Na stranách BC, CA a AB trojuholníka ABC sú postupne zvolené body D, E a F tak, že sa priamky AD, BE a CF pretínajú v jednom bode. Dokážte, že potom platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

4. *Hovoríme, že podmnožina P množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ je polovičatá, ak obsahuje 21 prvkov a každé zo 42 čísel v množinách P a $\mathsf{Q} = \{7x; x \in \mathsf{P}\}$ dáva po delení číslom 43 iný zvyšok. Určte počet polovičatých podmnožín množiny M.*

(*Josef Tkadlec*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dané je prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ a prirodzené číslo a nesúdeliteľné s p. Dokážte, že žiadne dve čísla z množiny $\mathsf{V} = \{0a, 1a, \dots, (p-1)a\}$ nedávajú rovnaký zvyšok po delení prvočíslom p.

N2. [„Sedemnásobok je jednoznačný“] Pri označení z úlohy dokážte, že pre každé $x \in \mathsf{M}$ existuje práve jedno $y \in \mathsf{M}$ také, že $x \equiv 7y \pmod{43}$ (čítajte ako „x dáva rovnaký zvyšok ako $7y$ po delení 43“).

N3. Aké zvyšky dávajú mocniny siedmich po delení 43? Ak je $1 \in \mathsf{P}$, čo možno povedať o príslušnosti týchto zvyškov do množín P a Q zo zadania úlohy?

D1. Dané je prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{1, \dots, p-1\}$ a jej prvok a. Dokážte, že potom existuje práve jeden prvok $b \in \mathsf{U}$ taký, že ab dáva zvyšok 1 po delení p.

D2. [Malá Fermatova veta] Dané je prvočíslo p a prirodzené číslo a nesúdeliteľné s p. Dokážte, že potom $p \mid a^{p-1} - 1$.

D3. [Wilsonova veta] Dokážte, že pre každé prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$.

---

5. *V rovine sú dané dva rôzne body O a A. Určte množinu ortocentier všetkých trojuholníkov ABC, pre ktoré je bod O stredom kružnice opísanej.* (*Pavel Šalom*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Dokážte, že $|\measuredangle BVC| = 180° - |\measuredangle BAC|$.

N2. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Dokážte, že obraz V' bodu V v súmernosti podľa priamky BC padne na kružnicu opísanú trojuholníku ABC. Dokážte, že to isté platí aj pre obraz V'' bodu V v súmernosti podľa stredu úsečky BC.

N3. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Z úlohy N2 vieme, že obraz V'' bodu V v stredovej súmernosti podľa stredu strany BC leží na kružnici opísanej. Dokážte navyše, že AV'' je priemerom tejto kružnice.

N4. Daná je kružnica k so stredom S a vnútri nej bod X. Určte množinu stredov všetkých tetív kružnice k, ktoré prechádzajú bodom X.

N5. Daná je kružnica k so stredom S a vnútri nej bod X. Určte množinu bodov, ktoré sú stredom nejakej jej tetivy, ktorá neobsahuje bod X.

D1. [Feuerbachova kružnica] Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V a stredom O kružnice opísanej. Dokážte, že stredy jeho strán, stredy spojníc vrcholov s jeho ortocentrom a päty jeho výšok ležia na jednej kružnici, ktorej stred je navyše stredom úsečky VO.

D2. V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O.

6. *Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin*

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)$$

je rovný mocnine niektorého prvočísla. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je súčin $(a+2b)(b+2a)$ mocninou niektorého prvočísla p.

N2. Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je rovný mocnine niektorého prvočísla.

D1. Pre navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c platí, že

$$(a+b+c) \mid (a+2b)(b+2c)(c+2a).$$

Dokážte, že číslo $a+b+c$ je zložené.

Na nasledujúcich stranách nájdete tie isté návodné a doplňajúce úlohy ešte raz, avšak doplnené o výsledky s náznakmi riešení či o odkazy na náš archív.

1. *Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí*

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$. (*Michal Rolínek*)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Súčet kladných čísel a, b je nanajvýš 16. Aká je najväčšia možná hodnota ich súčinu? [64. Do súčinu ab dosaďte vyjadrenie $a = p + \varepsilon$ a $b = p - \varepsilon$, pričom $p \leqq 8$ je aritmetický priemer čísel a a b.]

N2. Súčin kladných čísel a, b je aspoň 16. Aká je najmenšia možná hodnota ich súčtu? [8. Použite rovnaké vyjadrenie čísel a, b ako v N1 a dokážte, že z $ab \geqq 16$ vyplýva $p \geqq 4$.]

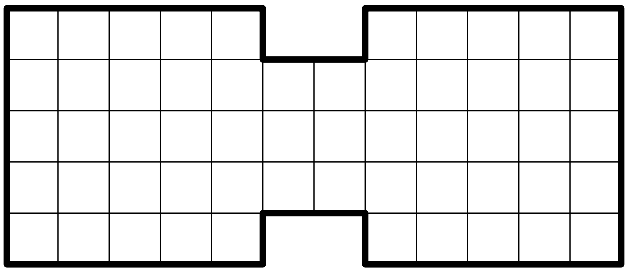
D1. Reálne čísla a_1, a_2, b_1, b_2 spĺňajú $a_1 > a_2$ a $b_1 > b_2$. Dokážte, že $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$. [Dokazovanú nerovnosť ekvivalentne upravte na $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0$.]

D2. [Permutačná nerovnosť] Nech $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ sú reálne čísla a nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je nejaké poradie pevne daných navzájom rôznych reálnych čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom je výraz

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

maximálny práve vtedy, keď je $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Dokážte. [Stačí ukázať, že usporiadania, ktoré nespĺňajú $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$, možno vylepšiť „prehodením“ jednej dvojice. To rieši úloha D1, ktorá je vlastne úlohou D2 pre $n = 2$.]

2. *Dokážte, že počet možností, ako sa dá útvar na obr. 2 vydláždiť dominovými kockami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kocka pokrýva vždy dve políčka susediace stranou.)* (*Josef Tkadlec*)



Obr. 2

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

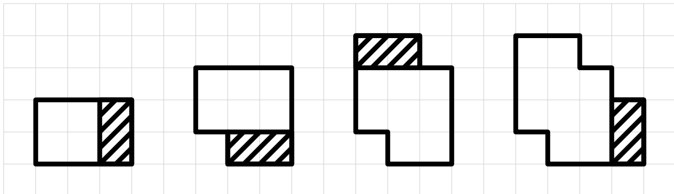
N1. Dokážte, že počet spôsobov, ako možno na šachovnici 8×8 umiestniť maximálny počet strelcov tak, aby sa žiadni dvaja navzájom neohrozovali, je druhá mocnina prirodzeného čísla. [Nepočítajte, iba rozdeľte na dve podúlohy – rozmiestnenia strelcov na čierne a na biele políčka sú navzájom nezávislé.]

N2. Koľkými spôsobmi možno vydláždiť dominovými kockami šachovnicu 8×8, z ktorej sú odrezané dve protiľahlé rohové políčka? [Nedá sa žiadnym spôsobom: ak sú odrezané políčka biele, je nutné pokryť 30 bielych a 32 čiernych políčok, pritom ľubovoľne umiestnená kocka domina pokryje vždy 1 biele a 1 čierne políčko.]

D1. Koľkými spôsobmi možno pokryť dominovými kockami obdĺžnik 2×10? [Postupujte indukciou pre obdĺžniky $2 \times n$. Nájdete tak súvislosť s Fibonacciho číslami v podobe rovností $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, pričom $p(n)$ označuje počet možných vydláždení obdĺžnika $2 \times n$. Výsledok je 89.]

D2. Majme šachovnicu 8×8 a ku každej „hrane“, ktorá oddeľuje dve jej políčka, napíšme prirodzené číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako možno celú šachovnicu rozrezať na obdĺžničky 2×1 tak, aby dotyčná hrana bola súčasťou rezu. Určte poslednú cifru súčtu všetkých takto napísaných čísel. [63-A-III-3. Aký je príspevok jedného vydláždenia do celkového súčtu?]

D3. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje útvar, ktorý možno kockami domina vydláždiť presne n spôsobmi. [Postupujte indukciou. Stačí vhodne „prilepovať“ stále rovnaký kus. (obr. 3)]



Obr. 3

---

3. *Vnútri strán AB a AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body P a Q. Označme R priesečník priamok BQ a CP a p, q, r postupne vzdialenosti bodov P, Q, R od priamky BC. Dokážte, že platí*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(*Patrik Bak*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Dokážte, že platí

$$S_{APB} \cdot S_{CPD} = S_{BPC} \cdot S_{DPA}.$$

[Vyjadrite obsahy všetkých štyroch trojuholníkov pomocou takých základní, ktoré ležia na jednej uhlopriečke štvoruholníka $ABCD$.]

N2. Dokážte, že v konfigurácii zo zadania úlohy platí $S_{BRC} > S_{PRQ}$. [Porovnajte obsahy trojuholníkov BCP a BQP.]

D1. Body P a Q ležia v tej istej polrovine určenej priamkou l. Ich kolmé priemety na priamku l označme ako P' a Q' a priesečník priamok PQ' a $P'Q$ ako R. Dokážte, že pre vzdialenosti p, q, r bodov P, Q, R od priamky l platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

[Uvažujte o vhodných dvojiciach podobných trojuholníkov, ktoré sú určené zadanými bodmi a ich kolmými priemetmi na priamku l.]

D2. Daný je bod X vnútri trojuholníka ABC. Dokážte, že ak označíme D priesečník priamok AX a BC, platí

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

[Nakreslite priamku AX vodorovne. Potom vynikne, že oba zlomky sa rovnajú podielu vzdialeností bodov B a C od priamky AX.]

D3. [Cevova veta (časť)] Na stranách BC, CA a AB trojuholníka ABC sú postupne zvolené body D, E a F tak, že sa priamky AD, BE a CF pretínajú v jednom bode. Dokážte, že potom platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

[Využite trikrát výsledok úlohy D2.]

---

4. *Hovoríme, že podmnožina P množiny $M = \{1, 2, 3, \ldots, 42\}$ je polovičatá, ak obsahuje 21 prvkov a každé zo 42 čísel v množinách P a $Q = \{7x;\, x \in P\}$ dáva po delení číslom 43 iný zvyšok. Určte počet polovičatých podmnožín množiny M.*

(*Josef Tkadlec*)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dané je prvočíslo p, množina $U = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ a prirodzené číslo a nesúdeliteľné s p. Dokážte, že žiadne dve čísla z množiny $V = \{0a, 1a, \ldots, (p-1)a\}$ nedávajú rovnaký zvyšok po delení prvočíslom p. [Predpokladajte opak a ku sporu doveďte fakt, že p delí rozdiel nejakých dvoch čísel z množiny V.]

N2. [„Sedemnásobok je jednoznačný"] Pri označení z úlohy dokážte, že pre každé $x \in M$ existuje práve jedno $y \in M$ také, že $x \equiv 7y \pmod{43}$ (čítajte ako „x dáva rovnaký zvyšok ako $7y$ po delení 43"). [Podľa N1 pre $p = 43$ a $a = 7$ sa medzi násobkami 7 všetkých nenulových zvyškov objaví každý nenulový zvyšok práve raz, teda aj vopred zvolený zvyšok x.]

N3. Aké zvyšky dávajú mocniny siedmich po delení 43? Ak je $1 \in P$, čo možno povedať o príslušnosti týchto zvyškov do množín P a Q zo zadania úlohy? [1, 7, 6, 42, 36, 37. Ďalej si rozmyslite, prečo v prípade $1 \in P$ je už príslušnosť ostatných piatich určených zvyškov do množín P a Q určená jednoznačne: $6, 36 \in P$ a $7, 42, 37 \in Q$.]

D1. Dané je prvočíslo p, množina $U = \{1, \ldots, p-1\}$ a jej prvok a. Dokážte, že potom existuje práve jeden prvok $b \in U$ taký, že ab dáva zvyšok 1 po delení p. [Podľa N1 je medzi „násobkami" čísla a zastúpený každý možný zvyšok po delení p práve raz. Teda aj zvyšok 1.]

D2. [Malá Fermatova veta] Dané je prvočíslo p a prirodzené číslo a nesúdeliteľné s p. Dokážte, že potom $p \mid a^{p-1} - 1$. [Podľa N1 sú množiny U a V (po redukcii na zvyšky po delení p) zhodné. Rovnať sa tak musia aj súčiny ich nenulových prvkov. Čo vyjde?]

D3. [Wilsonova veta] Dokážte, že pre každé prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$. [Tvrdenie je triviálne pre $p \in \{2, 3\}$. V prípade $p \geqq 5$ zo súčinu vyškrtneme všetky dvojice činiteľov, ktorých súčin dáva po delení p zvyšok 1. Ktoré dve čísla zvýšia (lebo tvoria takú dvojicu sami so sebou)?]

5. *V rovine sú dané dva rôzne body O a A. Určte množinu ortocentier všetkých trojuholníkov ABC, pre ktoré je bod O stredom kružnice opísanej.* (Pavel Šalom)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Dokážte, že $|\measuredangle BVC| = 180^\circ - |\measuredangle BAC|$. [Nezabudnite na prípad, keď je trojuholník ABC tupouhlý.]

N2. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Dokážte, že obraz V' bodu V v súmernosti podľa priamky BC padne na kružnicu opísanú trojuholníku ABC. Dokážte, že to isté platí aj pre obraz V'' bodu V v súmernosti podľa stredu úsečky BC. [V oboch dôkazoch využite výsledok úlohy N1.]

N3. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Z úlohy N2 vieme, že obraz V'' bodu V v stredovej súmernosti podľa stredu strany BC leží na kružnici opísanej. Dokážte navyše, že AV'' je priemerom tejto kružnice. [Vďaka stredovej súmernosti platí $CV \parallel BV''$, a preto z $CV \perp AB$ vyplýva $BV'' \perp AB$.]

N4. Daná je kružnica k so stredom S a vnútri nej bod X. Určte množinu stredov všetkých tetív kružnice k, ktoré prechádzajú bodom X. [V prípade $X = S$ sa jedná o množinu $\{S\}$, v prípade $X \neq S$ o Tálesovu kružnicu nad priemerom XS.]

N5. Daná je kružnica k so stredom S a vnútri nej bod X. Určte množinu bodov, ktoré sú stredom nejakej jej tetivy, ktorá neobsahuje bod X. [Na konštrukciu tetivy s daným stredom využite fakt, že os každej tetivy prechádza stredom kružnice. Kedy však táto konštrukcia vedie k tetive, ktorá bodom X prechádza? Hľadanou množinou je vnútro kružnice k, a to v prípade $X = S$ s výnimkou jediného bodu S, v prípade $X \neq S$ sú vylúčené všetky body Tálesovej kružnice nad priemerom XS okrem bodu S (ktorý tentoraz do výslednej množiny naopak patrí).]

D1. [Feuerbachova kružnica] Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V a stredom O kružnice opísanej. Dokážte, že stredy jeho strán, stredy spojníc vrcholov s jeho ortocentrom a päty jeho výšok ležia na jednej kružnici, ktorej stred je navyše stredom úsečky VO. [Využite výsledok úlohy N2 a použite rovnoľahlosť $\mathcal{H}(V, \frac{1}{2})$.]

D2. V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O. [58-A-III-6]

---

6. *Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin*

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je rovný mocnine niektorého prvočísla. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je súčin $(a+2b)(b+2a)$ mocninou niektorého prvočísla p. [$a = b = 3^k$, pričom $k \geqq 0$. Zo sústavy rovníc $a + 2b = p^u$ a $b + 2a = p^v$ vyjadrite neznáme a, b a dokážte, že ich hodnoty sú obe kladné, len keď sa prirodzené čísla u a v rovnajú – potom ale aj $a = b$.]

N2. Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je rovný mocnine niektorého prvočísla. [Dokážte, že aspoň jedna zátvorka je párna, a preto $p = 2$. Pri usporiadaní $a \geqq b \geqq c$, ktoré môžeme predpokladať, bude pre tri mocniny $a+b$, $a+c$, $b+c$ čísla 2 platiť $a+b \geqq a+c \geqq b+c$. Keby $a+b$, $a+c$ boli rôzne mocniny čísla 2, bola by prvá aspoň dvojnásobkom druhej, t. j. $a+b \geqq 2(a+c)$, odkiaľ by vyplývalo $b \geqq a + 2c > a$, a to je spor s $a \geqq b$. Preto musí platiť $a+b = a+c$, čiže $b = c$. To už vedie k záveru, že úlohe okrem ľahko uhádnuteľných trojíc $(2^k, 2^k, 2^k)$ vyhovujú v ľubovoľnom poradí aj trojice čísel $(2^n - 2^k, 2^k, 2^k)$, pričom $0 \leqq k < n-1$, a že žiadne iné riešenia neexistujú.]

D1. Pre navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c platí, že

$$(a+b+c) \mid (a+2b)(b+2c)(c+2a).$$

Dokážte, že číslo $a+b+c$ je zložené. [Ak by $a+b+c$ bolo prvočíslom, delilo by jednu zo zátvoriek, povedzme $a+2b$, a teda by delilo aj rozdiel $a+2b-(a+b+c) = b-c$, takže by platilo $a+b+c < |b-c|$, čo je spor.]