69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc*

$$\frac{1}{x+y}+z=1,\qquad \frac{1}{y+z}+x=1,\qquad \frac{1}{z+x}+y=1.$$

(*Tomáš Bárta*)

Riešenie. Keď odčítame od seba prvé dve rovnice a prevedieme oba zlomky na spoločného menovateľa, dostaneme

$$\frac{(y+z)-(x+y)}{(x+y)(y+z)}+z-x=0,$$

odkiaľ po vyňatí člena $z-x$ získame

$$(z-x)\left(\frac{1}{(x+y)(y+z)}+1\right)=0. \tag{1}$$

Analogickými úpravami pre rozdiel iných dvojíc rovníc potom dostaneme aj

$$(y-z)\left(\frac{1}{(z+x)(x+y)}+1\right)=0,\qquad (x-y)\left(\frac{1}{(y+z)(z+x)}+1\right)=0.$$

Predpokladajme najskôr, že sú čísla x, y, z navzájom rôzne. Potom môžeme ich nenulovými rozdielmi odvodené rovnice vydeliť a po zjednodušení riešiť sústavu

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)&=-1,\\ (y+z)(z+x)&=-1,\\ (z+x)(x+y)&=-1,\end{aligned}$$

ktorú možno po roznásobení prepísať ako

$$\begin{aligned}y^2&=-1-xy-yz-zx,\\ z^2&=-1-xy-yz-zx,\\ x^2&=-1-xy-yz-zx.\end{aligned}$$

Rovnosť $x^2=y^2=z^2$ však znamená, že sa aspoň dve z čísel x, y, z rovnajú, čo je v spore s predpokladom o ich rôznosti.

V ďalšom prípade, keď platí $x=y=z$, ostáva podľa pôvodnej sústavy vyriešiť rovnicu $1/(2x)+x=1$. Kvadratická rovnica $2x^2-2x+1=0$, ktorá je jej dôsledkom, má ale záporný diskriminant, a tak ani rovnica $1/(2x)+x=1$ žiadne reálne riešenie nemá.

Ostáva prípad, keď sú práve dve z čísel x, y, z rovnaké. Vzhľadom na symetriu sa stačí zaoberať prípadom $x=y\neq z$. Z rovnosti (1) po vydelení nenulovým číslom $z-x$ získame

$$-1=(x+y)(y+z)=2x(x+z),$$

zatiaľ čo z prvej zadanej rovnice vyjde

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{2x} = 1 - z.$$

Potom stačí dvoma spôsobmi vyjadriť hodnotu $1/(2x)$ ako

$$-x - z = \frac{1}{2x} = 1 - z,$$

odkiaľ už máme $x = -1$ a následne $z = 3/2$. Ľahko overíme, že trojica $(-1, -1, \frac{3}{2})$ vyhovuje aj pôvodnej sústave rovníc.

Odpoveď. Sústava rovníc má práve tri riešenia $(-1, -1, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, -1, -1)$, $(-1, \frac{3}{2}, -1)$.

Iné riešenie. Nech x, y, z sú riešenia sústavy. Potom ako každú z rovníc vynásobíme menovateľom príslušného zlomku, získame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 1 + xz + yz &= x + y, \\ 1 + yx + zx &= y + z, \\ 1 + zy + xy &= z + x. \end{aligned}$$

Ak odčítame od prvej rovnice rovnicu druhú, dostaneme

$$yz - yx = x - z, \quad \text{čiže} \quad (y+1)(z-x) = 0.$$

Podobným odčítaním (alebo vzhľadom na symetriu) v súhrne dostaneme sústavu rovníc

$$0 = (y+1)(z-x) = (z+1)(x-y) = (x+1)(y-z). \tag{2}$$

Teraz rozlíšime, či je niektoré z čísel x, y, z rovné číslu -1, alebo nie. Ak nie, podľa (2) by sme mali $x = y = z$ a po dosadení do pôvodnej sústavy by sme dostali kvadratickú rovnicu so záporným diskriminantom (pozri prvé riešenie). Musí teda nastať prípad, keď sa číslo -1 v trojici (x, y, z) nachádza.

Vzhľadom na symetriu stačí rozobrať iba prípad, keď $x = -1$. Vtedy sa sústava (2) redukuje na rovnicu $(y+1)(z+1) = 0$, a teda aspoň jedno z čísel y, z je tiež rovné -1. Po dosadení napríklad $x = y = -1$ do prvej z pôvodných rovníc dopočítame $z = 3/2$ a ľahko sa uistíme, že potom sú splnené aj zvyšné dve rovnice. Vďaka symetrii tak nachádzame jediné tri trojice $(-1, -1, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, -1, -1)$, $(-1, \frac{3}{2}, -1)$, ktoré zadanej sústave vyhovujú.

Iné riešenie. So sústavou rovníc zbavenou zlomkov, ktorú sme zapísali na úvod druhého riešenia, teraz naložíme inak. Po pričítaní výrazu $xy + 1$ k obom stranám prvej rovnice dostaneme

$$2 + xy + xz + yz = xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1).$$

Všimnime si, že výraz na ľavej strane je symetrický v premenných x, y a z. Rovnakú ľavú stranu teda získame aj po podobných úpravách druhej a tretej rovnice:

$$\begin{aligned} 2 + xy + xz + yz &= (y+1)(z+1), \\ 2 + xy + xz + yz &= (z+1)(x+1). \end{aligned}$$

Porovnaním pravých strán tak dostaneme, že

$$(x+1)(y+1) = (y+1)(z+1) = (z+1)(x+1).$$

Ak je každé z čísel x, y, z rôzne od -1, môžeme v každej z rovností krátiť a vyjde, že $x = y = z$. Podobne ako v prvom riešení zistíme, že tento prípad žiadne riešenie neposkytuje.

Ak je ale napríklad $x = -1$, potom musí platiť aj $(y+1)(z+1) = 0$, a teda aspoň jedno z čísel y, z je tiež rovné -1. Zvyšok dokončíme rovnako ako v druhom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Neúplné riešenia ohodnoťte podobne, ako teraz opíšeme pri troch vyššie podaných riešeniach:

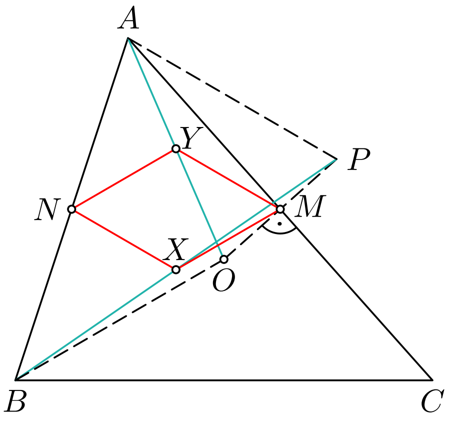
- ▷ Pri postupe z prvého riešenia dajte 4 body za vylúčenie prípadu $x \neq y \neq z \neq x$, z toho 1 bod za úpravu rozdielov *pôvodných* rovníc na súčinové tvary s činiteľmi $x-y$, $y-z$ a $z-x$, podobné ako má rovnica (1). Ďalej dajte 1 bod za vylúčenie prípadu $x = y = z$ a 1 bod za vyriešenie zvyšného prípadu, keď sa práve dve z čísel x, y, z rovnajú.
- ▷ Pri postupe z druhého riešenia dajte 4 body za odvodenie sústavy (2) a po jednom bode za následné doriešenie dvoch opísaných prípadov (možno ich rozlíšiť aj podľa toho, či platí $x = y = z$, alebo nie.)
- ▷ Pri postupe z tretieho riešenia dajte 4 body za dôkaz, že súčiny dvoch z troch činiteľov $x+1$, $y+1$, $z+1$ majú rovnakú hodnotu a po 1 bode za následné doriešenie dvoch situácií, keď sa buď žiadny z týchto činiteľov nerovná nule, alebo aspoň jeden sa nule rovná.
- ▷ Pokiaľ v inak úplnom riešení, pri ktorom sa hľadané trojice určia pomocou inej (odvodenej) sústavy, ako je tá pôvodná, chýba v závere aspoň zmienka o jednoduchej skúške dosadením do všetkých troch pôvodných rovníc alebo zdôvodnenie, prečo prípadne skúška nutná nie je, strhnite 1 bod, t. j. dajte 5 bodov.
- ▷ Len za nájdenie všetkých troch riešení (bez vysvetlenia, prečo iné neexistujú) dajte 1 bod.

Ak skúša riešiteľ viac prístupov, čiastkové bodové zisky (ako tie uvedené vyššie) nesčítavame, ale berieme ich maximum.

---

2. *V ostrouhlom trojuholníku ABC označme O stred kružnice opísanej. Obraz bodu O v osovej súmernosti podľa priamky AC označme P. Dokážte, že stredy úsečiek AO a BP ležia na tej istej kolmici na priamku BC.* (Patrik Bak)

Riešenie. Označme postupne M, N, X, Y stredy úsečiek AC, AB, BP, AO. (Bod M je samozrejme stredom aj úsečky OP.) Úsečky NY, YM, MX, XN sú potom postupne strednými priečkami trojuholníkov ABO, OPA, PBO, BPA (obr. 1).



Obr. 1

Platí tak

$$|NX| = \tfrac{1}{2}|AP| = |YM|$$

a zároveň

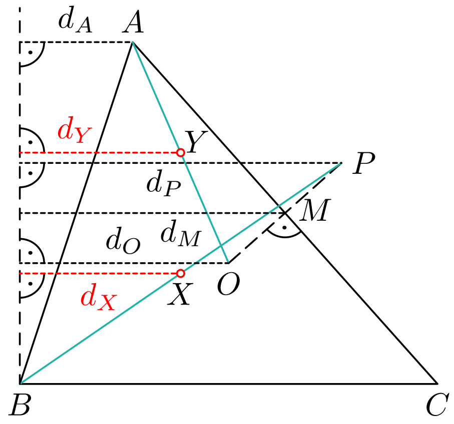
$$|NY| = \tfrac{1}{2}|BO| = |XM|.$$

Keďže bod O je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, platí $|BO| = |AO|$ a z osovej súmernosti navyše aj $|AO| = |AP|$. To dokopy znamená, že

$$|NX| = |YM| = |NY| = |XM|.$$

Ak neplatí $X = Y$ (keď je tvrdenie úlohy zrejmé), posledné rovnosti vedú ako je známe k záveru, že $NXYM$ je kosoštvorec alebo štvorec, a jeho uhlopriečka XY je teda kolmá na druhú uhlopriečku MN, čo je zároveň stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná s jeho stranou BC.[1] Preto je XY kolmé na BC, ako sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Budeme počítať vzdialenosti bodov od kolmice na stranu BC vedenej bodom B. Pre ľubovoľný bod Z označme túto vzdialenosť d_Z. Pri rovnakom označení bodov X, Y, M ako v prvom riešení nám stačí dokázať, že $d_Y = d_X$ (obr. 2).



Obr. 2

Keďže Y je stredom AO a O leží na osi strany BC, platí

$$d_Y = \tfrac{1}{2}(d_A + d_O) = \tfrac{1}{2}d_A + \tfrac{1}{4}d_C.$$

Podobne z určenia bodu X vyplýva rovnosť $d_X = \frac{1}{2}d_P$, a tak stačí vyjadriť aj vzdialenosť d_P pomocou d_A a d_C. To je ale jednoduché, lebo bod M je spoločným stredom AC a OP, a preto platí

$$d_M = \tfrac{1}{2}(d_O + d_P),$$

pričom $d_M = \frac{1}{2}(d_A + d_C)$. Z toho už nachádzame

$$d_X = \tfrac{1}{2}d_P = d_M - \tfrac{1}{2}d_O = \tfrac{1}{2}(d_A + d_C) - \tfrac{1}{4}d_C = \tfrac{1}{2}d_A + \tfrac{1}{4}d_C.$$

Máme tak $d_Y = d_X$ a sme hotoví.

Za úplné riešenie dajte šesť bodov. Neúplné postupy vedené ako v prvom vzorovom riešení hodnoťte nasledovne:

[1] Kolmosť úsečiek XY a MN možno v danej situácii zdôvodniť aj bez úvah o druhu štvoruholníka $NXMY$. Z rovností $|XM| = |XN|$ a $|YM| = |YN|$ totiž vyplýva, že oba body X a Y ležia na osi úsečky MN.

- ▷ Za dokreslenie bodu N dajte 1 bod. Ak riešiteľ navyše ukáže, že $NXMY$ je rovnobežník (resp. kosoštvorec), dajte ďalšie dva (resp. štyri) body. Štyrmi bodmi oceňte aj dôkaz kolmosti úsečiek XY a MN bez použitia kosoštvorca ako v poznámke 1 pod čiarou.
- ▷ Zabudnutie na prípad $X = Y$ (ktorý pre ostrouhlý trojuholník ABC, ako možno ukázať, nastať ani nemôže) nepenalizujte.

Pri riešeniach, ktoré počítajú so vzdialenosťami od kolmice vedenej bodom B (či už priamo, alebo vo forme súradníc kolmých priemetov bodov na priamku BC v úlohe číselnej osi), je bodovacia schéma nasledujúca:

- ▷ Za uvedenie, že stačí dokázať $d_X = d_Y$, dajte 1 bod.
- ▷ Za vhodné vyjadrenie jednej zo vzdialeností d_X, d_Y dajte 2 body, za vyjadrenie druhej z nich tým istým výrazom potom dajte 3 body. Ak je ale druhá vzdialenosť vyjadrená iným výrazom, záverečné 3 body dajte až za dôkaz, že výrazy pre obe vzdialenosti majú rovnakú hodnotu (napr. ekvivalentnými úpravami ich rovnosti).

---

3. *Pre ľubovoľnú štvorprvkovú podmnožinu P množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ označme*

$$Q = \{3x : x \in P\} \quad \text{a} \quad R = \{4x : x \in P\}.$$

Určte počet takých množín P, pre ktoré čísla z P, Q, R dávajú po delení číslom 13 všetky možné nenulové zvyšky. (Jaromír Šimša)

Riešenie. So všetkými číslami budeme počítať modulo 13, teda ako so zvyškami po delení 13. Ďalej je zrejmé, že nielen množina P, ale aj obe odvodené množiny Q a R sú štvorprvkové. Preto ak majú tri uvedené množiny obsahovať všetky nenulové zvyšky modulo 13, ktorých je dvanásť, musia byť navzájom disjunktné.

Nech P je ľubovoľná množina spĺňajúca požiadavky úlohy a nech $x \in P$. Potom z incidencií $3x \in Q$ a $4x \in R$ vyplýva, že číslo $12x = 3 \cdot 4x = 4 \cdot 3x$ nepatrí do Q ani do R, lebo $4x$ ani $3x$ nepatrí do P a každé dve rôzne čísla majú rôzne trojnásobky aj rôzne štvornásobky. Preto $12x \in P$ a aj

$$3 \cdot 12x = 10x \in Q \quad \text{a} \quad 4 \cdot 12x = 9x \in R.$$

Šestica čísel $(x, 4x, 3x, 12x, 9x, 10x)$ so zaradením (P, R, Q, P, R, Q) má navyše, ako sa ľahko overí, tú vlastnosť, že každý jej nasledujúci člen je (modulo 13) štvornásobkom predchádzajúceho čísla, čo platí aj cyklicky, teda aj pre posledný a prvý člen.

Všetky čísla od 1 do 12 vytvárajú dve cyklické šestice opísaného druhu

$$(1, 4, 3, 12, 9, 10) \quad \text{a} \quad (2, 8, 6, 11, 5, 7)$$

a na určenie vyhovujúcej množiny P stačí len zadať, ktorú z troch použitých farieb čísla z P majú – v každej z oboch šestíc nezávisle. Hľadaný počet je preto rovný $3 \times 3 = 9$.

Iné riešenie. Počítajme opäť s číslami ako s ich zvyškami modulo 13. Vďaka tomu, že $27x = x$ pre každý zvyšok x, sa množina všetkých 12 nenulových zvyškov modulo 13 rozpadá na štyri cyklické trojice $(x, 3x, 9x)$, konkrétne

$$A = (1, 3, 9), \; B = (2, 6, 5), \; C = (4, 12, 10), \; D = (7, 8, 11).$$

Z ľubovoľných dvoch zvyškov v každej trojici je jeden trojnásobkom druhého, takže do P musí patriť po jednom prvku z každej z trojíc A, B, C, D. Pre taký výber jedného prvku a z trojice A a jedného prvku b z trojice B máme $3 \times 3 = 9$ možností.

Ukážeme, že každé dva také prvky a, b možno práve jedným spôsobom doplniť niektorými prvkami c z trojice C a d z trojice D na množinu $\mathsf{P} = \{a, b, c, d\}$, ktorá bude vyhovovať požiadavkám úlohy.

Všimnime si, že štvornásobok každého prvku z trojice A, resp. C je prvok patriaci naopak do trojice C, resp. A. Túto vlastnosť má nielen pár trojíc A a C, ale tiež pár trojíc B a D. Ak má preto daný prvok a z trojice A (zloženej z a, $3a$, $9a$) patriť do P, nesmie tam z trojice C (zloženej zo zvyškov $4a$, $4 \cdot 3a$, $4 \cdot 9a$) patriť ani jej prvok $4a$ (ten musí ležať v R), ani jej prvok $4 \cdot 9a$ rovný $10a$ (lebo jeho štvornásobok $40a = a$ by potom ležal v P aj R), takže do P nutne patrí zvyšný prvok z C, čiže $c = 4 \cdot 3a = 12a$. Podobne s daným prvkom b z trojice B musí do P patriť aj prvok $12b$ z trojice D.

Ostáva ukázať, že každá takto zostavená množina $\mathsf{P} = \{a, b, 12a, 12b\}$ má požadovanú vlastnosť. Vyplýva to z našej konštrukcie vyjadrenej tabuľkou

	A	B	C	D
P	a	b	$12a$	$12b$
Q	$3a$	$3b$	$10a$	$10b$
R	$9a$	$9b$	$4a$	$4b$

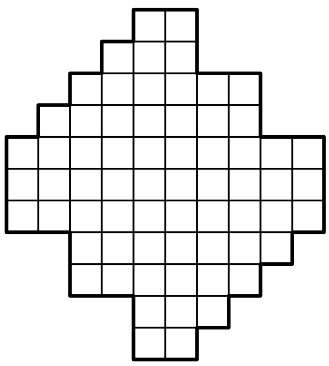
Hľadaný počet vyhovujúcich množín P je rovný 9.

Za úplné riešenie je 6 bodov. Postupy, ktoré sa namiesto uplatnenia kombinatorického pravidla súčinu zaoberajú konštrukciou konkrétnych príkladov vyhovujúcich množín P, hodnoťte podľa tejto schémy:

- ▷ Za zostrojenie aspoň jednej množiny P dajte 1 bod.
- ▷ Za konštrukciu všetkých deviatich množín P dajte 3 body.
- ▷ Zvyšné tri body dajte za zdôvodnenie, že iné množiny P nevyhovujú. Pritom ziskom 1 bodu oceňte napríklad odvodenie čiastočného poznatku, že $12x \in \mathsf{P}$ pre každé $x \in \mathsf{P}$ (alebo aj viac podobných, s ním ekvivalentných poznatkov) bez ďalšieho podstatného pokroku.

---

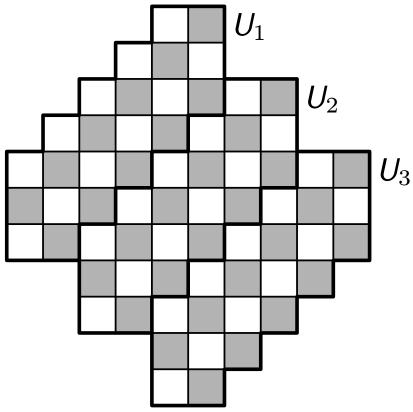
4. *Určte, koľkými spôsobmi možno útvar*



Obr. 3

vydláždiť dominovými kockami. (*Josef Tkadlec*)

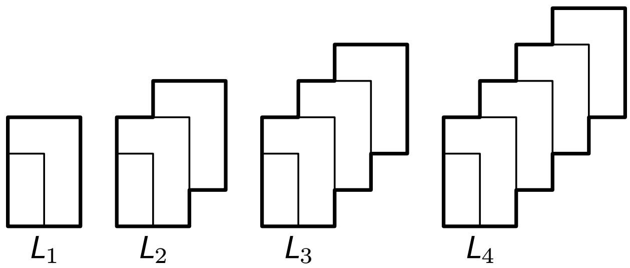
Riešenie. Políčka daného útvaru ofarbíme šachovnicovo a útvar rozdelíme na tri zhodné útvary U_1, U_2, U_3, ako je naznačené na obr. 4.



Obr. 4

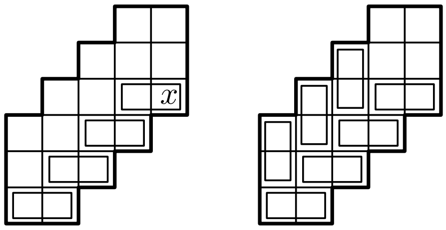
Teraz si všimneme, že útvar U_1 pozostáva z rovnakého počtu čiernych a bielych políčok a navyše susedí iba s políčkami jednej farby. Pritom ľubovoľná dominová kocka, ktorá by mohla zvonka presiahnuť do U_1, pokrýva jedno z bielych políčok diagonály U_2 susediacej s U_1, kde teda môže zakryť jedine jedno zo susedných čiernych políčok útvaru U_1. Každé také presahovanie by teda narušilo zistenú rovnováhu čiernych a bielych políčok útvaru U_1 v neprospech (voľných) čiernych políčok, preto útvar U_1 je vydláždený bezo zvyšku a bez presahovania. Analogickú úvahu možno spraviť pre útvar U_3, a tým pádom aj útvar U_2 je nutne vydláždený bezo zvyšku. Ak označíme k počet možností, ako vydláždiť dominovými kockami útvar U_1, je hľadaný počet spôsobov rovný k^3.

Hodnotu k určíme tak, že pomocou matematickej indukcie vyriešime všeobecnejšiu úlohu. Budeme dokazovať, že útvar L_n vzniknutý „prilepením“ n kusov tvaru obráteného L k obdĺžničku 1×2 (obr. 5) možno vydláždiť práve $2n+1$ spôsobmi.



Obr. 5

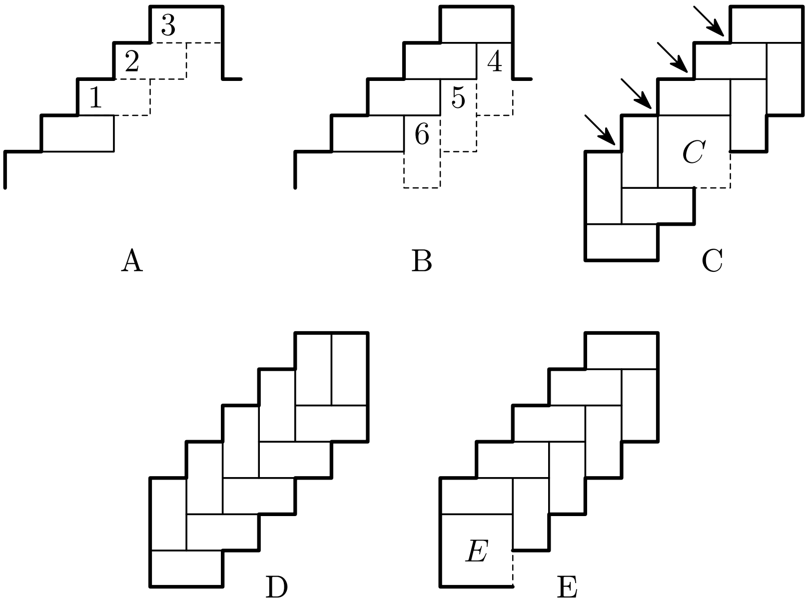
Útvar L_1 sa dá naozaj vydláždiť tromi spôsobmi. Na prevedenie indukčného kroku od m k $m+1$ uvažujme útvar L_{m+1} a rozlíšme dva prípady. Ak je pravé horné obrátené L vydláždené bezo zvyšku, ostáva vydláždiť útvar L_m, čo sa dá $2m+1$ spôsobmi. V opačnom prípade je spodné políčko x spomenutého L pokryté vodorovnou kockou, čo postupne vynúti položenie ďalších vodorovných kociek (ako na obr. 6 vľavo) a následne aj zvislých kociek (ako na obr. 6 vpravo), až ostane vydláždiť štvorec 2×2 vpravo hore, čo možno dvoma spôsobmi. Celkom tak máme $(2m+1)+2 = 2(m+1)+1$ spôsobov vydláždenia L_{m+1}, čím sme indukčný krok dokončili.



Obr. 6

Keďže $L_5 = U_1$, je hľadané k rovné 11 a celkový počet možností, ako vydláždiť pôvodný útvar, je tak $k^3 = 11^3 = 1331$.

Iné riešenie. Zamerajme sa na päť políčok, ktoré tvoria ľavý horný okraj pokrývaného útvaru. Každé z týchto políčok je pokryté vodorovnou alebo zvislou kockou. Vidno, že ak je niektoré z týchto políčok pokryté vodorovnou kockou, tak aj všetky políčka šikmo nahor doprava od neho sú pokryté vodorovnými kockami (postupne políčka 1, 2, 3 na obr. 7A), čo ďalej implikuje pokrytie ďalších políčok zvislými kockami (postupne políčka 4, 5, 6 na obr. 7B). Podobne, ak je niektoré z oných piatich políčok pokryté zvislou kockou, sú aj všetky políčka šikmo nadol doľava od neho pokryté zvislými kockami, čo implikuje pokrytie ďalších políčok vodorovnými kockami ako v dolnej časti obr. 7C.



Obr. 7

Teraz rozlíšme tri prípady.

1. Všetkých päť políčok je pokrytých zvislými kockami. Potom vynútená časť dláždenia vyzerá ako na obr. 7D.

2. Všetkých päť políčok je pokrytých vodorovnými kockami. Potom vynútená časť dláždenia vyzerá ako na obr. 7E, pričom štvorec E môže byť vydláždený dvoma rôznymi spôsobmi (a musí byť vydláždený bezo zvyšku).

3. V jednom zo štyroch miest označených na obr. 7C šípkami dochádza k tomu, že políčka napravo nahor od tohto miesta sú pokryté vodorovnými kockami a políčka naľavo nadol od tohto miesta sú pokryté zvislými kockami. Potom vynútená časť

dláždenia vyzerá ako na obr. 7C, pričom štvorec C môže byť vydláždený dvoma rôznymi spôsobmi (a musí byť vydláždený bezo zvyšku).

Ukázali sme, že útvar U_1 z obr. 4prvého riešenia musí byť vydláždený bezo zvyšku, a to jedenástimi možnými spôsobmi ($1 + 2 + 4 \cdot 2 = 11$). Zo symetrie vyplýva, že aj útvar U_3 musí byť vydláždený bezo zvyšku, a to jedenástimi možnými spôsobmi. Ostáva časť U_2, ktorá je rovnaká ako U_1 a U_3, možno ju teda vydláždiť jedenástimi možnými spôsobmi. Celkom možno útvar vydláždiť $11^3 = 1331$ spôsobmi.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

- ▷ Za zdôvodnenie, že hľadaný počet možností je k^3, pričom k je počet možností ako vydláždiť menší útvar, dajte 3 body.
- ▷ Za úspešné určenie $k = 11$ dajte 3 body, a to aj v prípade, že ich riešiteľ nájde rozborom všetkých možností.

  Pri postupe bližšom druhému riešeniu dajte
- ▷ 1 bod za úvahy z obr. 7A a obr. 7B o vynútených ťahoch,
- ▷ 1 bod za symetrickú úvahu zodpovedajúcu vynúteným ťahom v dolnej časti obrázka 7C,
- ▷ 1 bod za zdôvodnenie, že útvar U_1 musí byť vydláždený bezo zvyšku (pomocou vynútených ťahov ako na obr. 7C).
- ▷ Ak ale chýbajú prípady D, E z obr. 7, alebo je chybne určený počet možných vydláždení útvaru U_1, dajte celkom iba 4 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020