70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *a) Dokážte nerovnosť $4(a^2+b^2) > (a+b)^2 + ab$ pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b.*
b) Nájdite najmenšie reálne číslo k také, aby nerovnosť $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ platila pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b. (Ján Mazák)

Riešenie. a) Po roznásobení dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $4a^2+4b^2 > a^2+b^2+ 3ab$, ktorú ešte upravíme na tvar $3a^2+3b^2 > 3ab$, v ktorom ju dokážeme. Ak je $a \geqq b > 0$, potom $3a^2 \geqq 3ab$ a $3b^2 > 0$. Sčítaním týchto dvoch nerovností už dostaneme dokazovanú nerovnosť. Ak je naopak $b \geqq a$, postupujeme analogicky (alebo sa len odvoláme na symetriu).

Inou možnosťou je napríklad vyjsť zo zrejmej nerovnosti $3(a-b)^2 \geqq 0$, ktorú upravíme na tvar $3a^2+3b^2 \geqq 6ab$. Určite platí $6ab > 3ab$ (keďže obe čísla a, b sú kladné), a tak dokopy dostávame $3a^2+3b^2 \geqq 6ab > 3ab$ a sme hotoví.

b) Zadanú nerovnosť ekvivalentne upravíme na tvar $(k-1)(a^2+b^2) \geqq 3ab$. Dosadením $a=b=1$ dostaneme $2(k-1) \geqq 3$, čiže $k \geqq 5/2$, a tak každé vyhovujúce číslo k je nutne aspoň $5/2$ (v prípade $k < 5/2$ zadaná nerovnosť neplatí napríklad pre dvojicu $a=b=1$)[1]. Pre $k=5/2$ pritom máme

$$(k-1)(a^2+b^2) = \frac{3}{2}(a^2+b^2) \geqq \frac{3}{2}\cdot 2ab = 3ab,$$

pričom sme využili všeobecne platnú nerovnosť $a^2+b^2 \geqq 2ab$, ktorá je prepisom zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$.[2] Došli sme k záveru, že hľadané najmenšie k je rovné $5/2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za časť a) a 4 body za časť b). V časti b) dajte 1 bod za nájdenie hľadanej konštanty $k=5/2$ (aj v prípade, že je uhádnutá), ďalšie 2 body za dôkaz nerovnosti pre $k=5/2$ a 1 bod za zdôvodnenie, že pre $k<5/2$ nerovnosť všeobecne neplatí.

2. *Pre každé kladné celé číslo k označme d_k počet jednociferných deliteľov čísla k. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí*

$$\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n} < 3.$$

(Josef Tkadlec)

Riešenie. Uvažujme jednociferné číslo d. Pozrieme sa, koľkokrát číslo d ako deliteľ prispieva do súčtu $d_1+d_2+\ldots+d_n$. Napríklad d rovné piatim prispieva jednotkou číslam $d_5, d_{10}, d_{15}, \ldots$, ostatným číslam neprispieva. Z toho je jasné, že každé d prispieva do súčtu $d_1+d_2+\ldots+d_n$ číslom $\lfloor n/d \rfloor$, pričom $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x. Sčítaním týchto príspevkov pre $d=1,2,\ldots,9$ tak dostaneme vyjadrenie

$$d_1+d_2+\ldots+d_n = \sum_{d=1}^{9} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor. \tag{1}$$

[1] V úplnom riešení stačí uviesť jednu takú dvojicu, aj keď požadovanú vlastnosť čísla $k<5/2$ vyvracia napríklad aj každá iná dvojica sebe rovných kladných čísel a, b.

[2] Možno sa tiež odvolať na AG-nerovnosť $\frac{1}{2}(u+v) \geqq \sqrt{uv}$ pre kladné čísla $u=a^2$ a $v=b^2$.

Ak teraz uplatníme zrejmú nerovnosť $\lfloor x \rfloor \leqq x$ pre čísla $x = n/d$, bude nám na vyriešenie úlohy stačit dokázať druhú z nerovností

$$\frac{1}{n}\,(d_1 + d_2 + \ldots + d_n) \leqq \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{9} \frac{n}{d} < 3. \tag{2}$$

Tá po skrátení čísla n prejde na tvar

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9} < 3. \tag{3}$$

Namiesto rutinného výpočtu ľavej strany nerovnosti (7129/2520) si môžeme všimnúť, že platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{2}{4} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < \frac{3}{7} &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto troch nerovností a pričítaním jednotky k obom stranám už dostávame potrebnú nerovnosť (3) dokonca takmer bez počítania.

Poznámka. Použitie funkcie $y = \lfloor x \rfloor$ v predloženom riešení nie je nevyhnutné: Príspevky deliteľov d do súčtu $d_1+d_2+\ldots+d_n$ možno zrejme priamo odhadnúť zhora zlomkami n/d a potom ich sčítaním rovno dospieť k prvej z nerovností (2).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 3 body za myšlienku, že pre daný deliteľ d sa pozrieme na jeho príspevok do súčtu $d_1+d_2+\ldots+d_n$ (jedná sa o metódu počítania jedného množstva, v danom prípade platných relácií $d \mid k$ ($d = 1, 2, \ldots, 9$, $k = 1, 2, \ldots, n$), dvoma spôsobmi); ďalšie 2 body za odvodenie prvej nerovnosti v (2) (z toho 1 bod za vyjadrenie (1), ak volí riešiteľ túto cestu); 1 bod za akékoľvek správne overenie nerovnosti (3).

---

3. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D na preponu AB. Označme $E \neq D$ bod priamky p taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.* (Jaroslav Švrček)

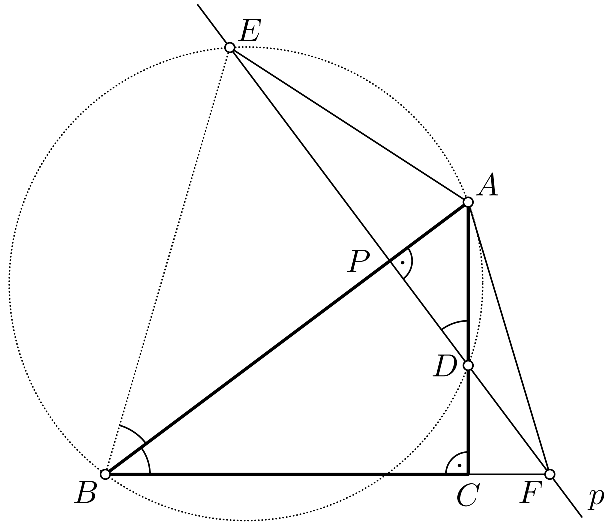
Riešenie. Označme P pätu kolmice p z bodu D na preponu AB uvažovaného pravouhlého trojuholníka ABC.[3]

Štvoruholník $AEBD$ je tetivový, takže podľa vlastnosti obvodových uhlov platí $|\measuredangle ABE| = |\measuredangle ADE|$. Všimnime si ďalej, že pravouhlé trojuholníky ABC a ADP majú spoločný ostrý vnútorný uhol pri vrchole A, a tak majú zhodné ostré vnútorné uhly aj pri vrcholoch B a D. Dokopy dostávame

$$|\measuredangle ABF| = |\measuredangle ABC| = |\measuredangle ADP| = |\measuredangle ADE| = |\measuredangle ABE|.$$

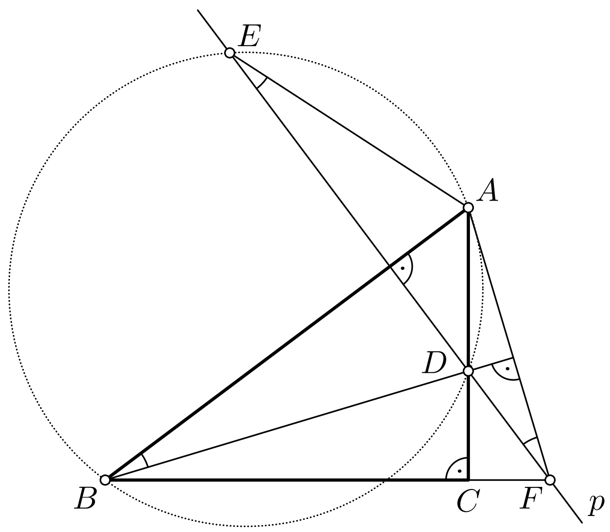
[3] Na priamke p tak uvažujeme celkom 4 body, ktoré sú zrejme v poradí E, P, D, F, čo nie je v riešení nutné ani spomínať, tobôž nie dokazovať.

Dokázaná zhodnosť uhlov ABF, ABE, čiže uhlov PBF, PBE pre trojuholník EBF znamená, že jeho výška BP leží na osi vnútorného uhla pri vrchole B (obr. 1). Tento trojuholník je teda rovnoramenný a priamka BP je osou jeho základne EF.[4] Keďže bod A na tejto osi leží tiež, platí rovnosť $|AE| = |AF|$, ktorú sme mali dokázať. (Navyše sme ukázali, že štvoruholník $AEBF$ je deltoid.)



Obr. 1

Iné riešenie. Bod D je ortocentrom ostrouhlého trojuholníka ABF, lebo je priesečníkom jeho výšky AC s výškou z vrcholu F, ktorá totiž leží na priamke p. Z toho vyplýva $BD \perp AF$, a preto oba uhly ABD a AFD sú doplnky toho istého uhla BAF do $90°$, teda sú zhodné. S uhlom ABD je navyše zhodný aj uhol AED, keďže sa jedná o obvodové uhly nad tetivou AD kružnice opísanej štvoruholníku $AEBD$ (obr. 2). Dokopy dostávame $|\measuredangle AED| = |\measuredangle AFD|$, čiže $|\measuredangle AEF| = |\measuredangle AFE|$, čo znamená, že trojuholník AEF je rovnoramenný, t. j. naozaj platí $|AE| = |AF|$.



Obr. 2

[4] Tento zo školskej výučby známy záver, ktorý vyplýva zo zhodnosti trojuholníkov BPE a BPF podľa vety *usu*, nie je nutné v riešení dokazovať.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov.

Pri postupe z prvého riešenia dajte: 2 body za dôkaz rovnosti $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle ABE|$; 2 body za zdôvodnenie rovnosti $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle ABF|$; 2 body za úvahu vedúcu od dokázaných rovností uhlov k rovnosti $|AE| = |AF|$.

Pri postupe z druhého riešenia dajte: 2 body za dôkaz rovnosti $|\measuredangle AED| = |\measuredangle ABD|$; 3 body za zdôvodnenie rovnosti $|\measuredangle ABD| = |\measuredangle AFD|$ (z toho 1 bod za pozorovanie, že bod D leží na dvoch výškach trojuholníka ABF a 1 bod za z toho vyplývajúci záver $BD \perp AF$); 1 bod za úvahu vedúcu od dokázaných rovností uhlov k rovnosti $|AE| = |AF|$. Po zistení, že bod D je ortocentrom trojuholníka ABF, možno riešenie tiež dokončiť použitím všeobecného poznatku, že kružnice opísané trojuholníkom ABF a ABD sú súmerne združené podľa priamky AB. Riešiteľ to môže prehlásiť za známe a nedokazovať.

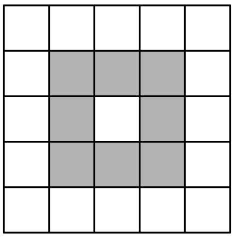
Body z oboch postupov riešenia sa nesčítajú. V prípade, že riešiteľ naznačí obe cesty, ale ani jednu nedokončí, hodnoťte tú cestu, na ktorej pozbiera viac bodov. Ak napríklad riešiteľ dokáže ako rovnosť $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle ABE|$, tak rovnosť $|\measuredangle AED| = |\measuredangle ABD|$, získava za to iba 2 body. Ak k tomu ešte napríklad dokáže, že $BD \perp AF$, získava už 4 body.

---

4. *Na hracom pláne s rozmermi 9×9 štvorčekov je umiestnená loď tvorená ôsmimi štvorčekmi po obvode štvorca 3×3 (na obr. 3 je vyznačená sivou farbou).*

a) Na koľko štvorčekov musíme vystreliť, aby sme mali istotu, že loď zasiahneme aspoň na dvoch rôznych miestach? O prvom zásahu sa pritom nedozvieme.

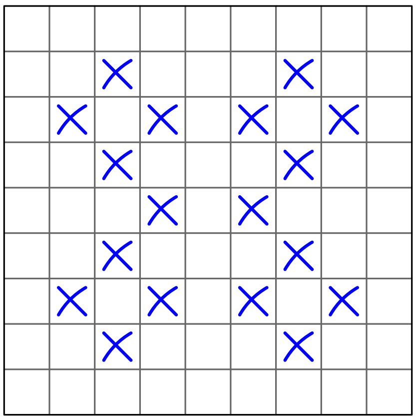
b) Stačí rovnaký počet výstrelov aj pre hrací plán s veľkosťou 11×9?



Obr. 3

(*Tomáš Bárta*)

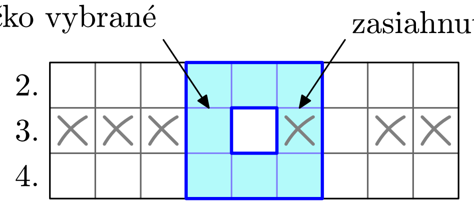
Riešenie. a) Štvorec 9×9 rozdelíme na 9 štvorcov 3×3. Do každého z nich musíme určite vystreliť aspoň dvakrát, t. j. celkom potrebujeme aspoň 18 výstrelov. Príklad na obr. 4 ukazuje, že 18 výstrelov stačí.



Obr. 4

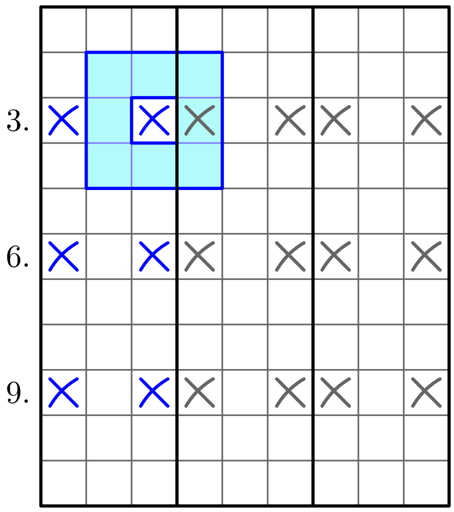
b) Predpokladajme teraz, že máme k dispozícii 18 výstrelov na hrací plán 11×9 tvorený 11 riadkami a 9 stĺpcami. Riadky označme poradovými číslami 1 až 11.

Do ľubovoľných troch susedných riadkov sa vojdú tri neprekrývajúce sa lode, na ktoré teda potrebujeme aspoň 6 výstrelov. Takže 6 výstrelov potrebujeme ako na susedné riadky 6, 7 a 8, tak aj na susedné riadky 9, 10 a 11. Na prvých päť riadkov nám teda ostáva nanajvýš 6 výstrelov. Pritom v riadkoch 1, 2 a 3 musí byť aspoň 6 zásahov, rovnako ako v riadkoch 3, 4 a 5. Z toho vyplýva, že v prvých piatich riadkoch musí všetkých 6 zásahov ležať v 3. riadku. Vždy tak niektoré jeho políčko zostane nezasiahnuté. Umiestnime loď do riadkov 2, 3 a 4 tak, aby „prechádzala" *vybraným* nezasiahnutým políčkom 3. riadka. Loď je potom zasiahnutá nanajvýš raz (lebo zásahy v 2. aj 4. riadku sme vylúčili), pozri obr. 5. Tým sme dokázali, že 18 výstrelov pre hrací plán 11×9 nestačí.



Obr. 5

Iné riešenie. Opíšme odlišný postup pre časť b). Znova predpokladajme, že máme k dispozícii 18 výstrelov na hrací plán 11×9, tvorený 11 riadkami a 9 stĺpcami. Riadky opäť označíme poradovými číslami 1 až 11. Rozdeľme plán na tri časti s rozmermi 11×3. Vyznačili sme ich na obr. 6 spolu so všetkými 18 zásahmi, ktorých spôsob rozmiestnenia je, ako ukážeme, zadaním úlohy vynútený. Na to budeme v nasledujúcom odseku potrebovať iba lode, z ktorých každá leží celá v jednej z troch vymedzených častí.[5]



Obr. 6

Z celkového počtu 18 zásahov ich musí byť 6 v každej z troch uvažovaných častí, lebo do akejkoľvek jej podčasti 9×3 sa vojdú tri neprekrývajúce sa lode. Ak navyše zvolíme tieto podčasti v riadkoch 3 až 11, resp. 1 až 9, zistíme, že žiadny zásah sa

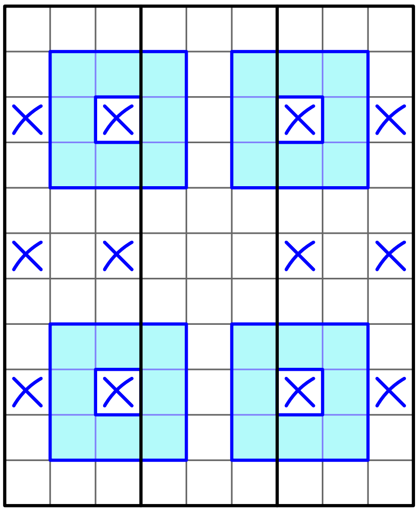
[5] Toto konštatovanie je dôležité pre dôkaz uvedený v poznámke za riešením.

nemôže vyskytovať v riadkoch 1, 2, 10 a 11. Preto v každej z troch uvažovaných častí musí byť po 2 zásahoch v riadkoch 3 a 9 – kvôli lodiam v riadkoch 1 až 3, resp. 9 až 11. Zvyšné 2 zásahy potom musia byť v riadku 6 – kvôli lodi v riadkoch 4 až 6 a lodi v riadkoch 6 až 8. Určené dvojice zásahov v riadkoch 3, 6, 9 musia byť ale rozmiestnené ako na obr. 6 – kvôli lodiam v trojiciach riadkov 2 až 4, 5 až 7, 8 až 10.

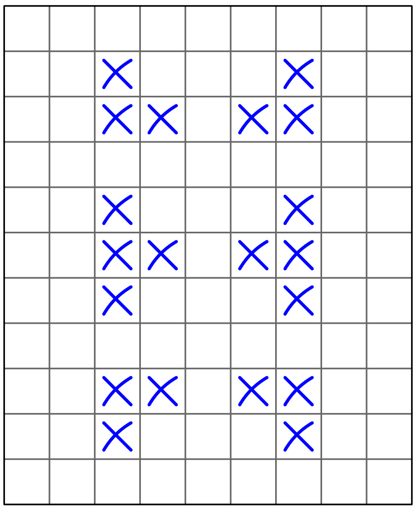
Príklad lode vykreslenej na obr. 6 dokazuje, že 18 výstrelov na celý hrací plán 11×9 nestačí.

Poznámka. Využime poznatky z druhého riešenia na krátky dôkaz, že ani 19 výstrelov pre hrací plán 11×9 nestačí.

Rozdeľme opäť hrací plán na tri časti 11×3. Podľa druhého riešenia musí byť všetkých 19 výstrelov rozdelených na tieto častí v počtoch 6, 6 a 7. Dve časti so 6 zásahmi, ktorých nutné rozmiestnenie podľa druhého riešenia poznáme, nemôžu byť susedné, lebo v opačnom prípade by sme podľa obr. 6 našli loď s iba jedným zásahom. Časť so 7 zásahmi je teda prostredná a v každej z oboch krajných častí je nutné rozmiestnenie 6 zásahov známe – pozri obr. 7. Sú na ňom navyše vykreslené 4 lode, ktoré vedú k záveru, že v prostrednej časti by muselo byť aspoň 8 zasiahnutých políčok, a to je spor.



Obr. 7



Obr. 8

Príklad z obr. 8 dosvedčuje, že 20 výstrelov na hrací plán 11×9 už stačí.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za časť a) a 3 body za časť b).

V časti a) dajte 1 bod za úvahu, prečo 17 výstrelov nestačí, a 2 body za vyhovujúci príklad 18 výstrelov.

Za časť b) môžu získať body iba tí riešitelia, ktorí sa rozhodnú zdôvodňovať, že 18 výstrelov nestačí (ale za sformulovanie tejto hypotézy žiadny bod ešte neudeľujte).

Pri postupe z časti b) prvého riešenia, založenom na úvahách o celých riadkoch, dajte: 1 bod za dôkaz existencie 5 susedných riadkov s nanajvýš 6 zásahmi; ďalší 1 bod za zdôvodnenie, že medzi týmito 5 riadkami existuje riadok, ktorý z nich nie je krajný a ktorého oba susedné riadky sú bez zásahu; 1 bod za určenie polohy lode, ktorá vedie ku sporu.

Pri postupe z druhého riešenia dajte: 2 body za odvodenie nutného rozmiestnenia 6 zásahov v každej z troch častí 11×3 (len za zistenie, že v každej časti je práve 6 zásahov, dajte 1 bod, iba keď sú navyše vylúčené zásahy v prvých dvoch aj posledných dvoch riadkoch); 1 bod za určenie polohy lode, ktorá vedie ku sporu.

Body z oboch postupov riešenia sa nesčítajú, výsledkom je maximum z oboch počtov. Pri iných neúplných postupoch je možné udeliť napríklad 1 bod za odvodenie, že v niektorej časti 5×3 (jednej alebo aj viacerých) sú iba dva zásahy a oba ležia v prostrednom z jej piatich riadkov. Pri takých postupoch je možné udeliť 2 body iba v prípadoch, keď je jasné, že postup možno úspešne dokončiť a riešiteľovi na to ostávalo spraviť málo (rovnako ako pri pokynoch vyššie pre dva opísané postupy). Za triviálnejšie zistenie (napríklad: prvé dva aj posledné dva riadky sú bez zásahu) žiadny bod neudeľujte.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Tomáš Jurík
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021