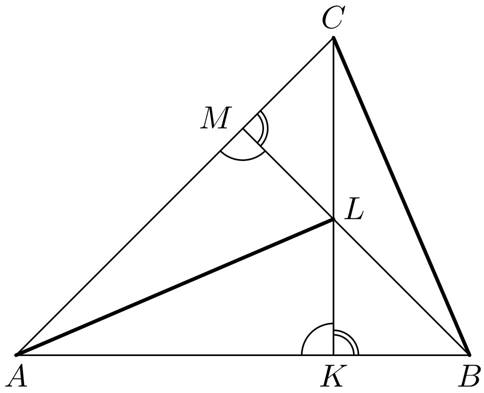
2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

1. *Určte veľkosti vnútorných uhlov všetkých trojuholníkov ABC s vlastnosťou: Vnútri strán AB, AC existujú postupne body K, M, ktoré s priesečníkom L priamok MB a KC tvoria tetivové štvoruholníky $AKLM$ a $KBCM$ so zhodnými opísanými kružnicami.*
(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Štvoruholník $KBCM$ je tetivový práve vtedy, keď $|\measuredangle CMB| = |\measuredangle CKB|$, čiže $|\measuredangle AKL| = |\measuredangle AML|$ (obr. 1). Pritom štvoruholník $AKLM$ je tetivový práve vtedy, keď $|\measuredangle AKL| + |\measuredangle AML| = 180°$. V skúmanom prípade preto musia byť všetky štyri uvedené uhly pravé, K a M sú tak päty výšok v trojuholníku ABC, ktorý je teda ostrouhlý, a bod L je priesečníkom jeho výšok. Kružnica opísaná štvoruholníku $KBCM$ je Tálesovou kružnicou nad priemerom BC a kružnica opísaná štvoruholníku $AKLM$ je Tálesovou kružnicou nad priemerom AL.



Obr. 1

Kružnice opísané uvedeným štvoruholníkom sú zhodné práve vtedy, keď sú zhodné ich priemery BC a AL. Označme veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom α, β, γ. Pravouhlé trojuholníky CKB a AKL sú podobné, lebo pre ich uhly pri zodpovedajúcich vrcholoch C a A platí $|\measuredangle BAL| = |\measuredangle BCK| = 90° - \beta$. Zrejme preto $|BC| = |AL|$ platí práve vtedy, keď $|AK| = |CK|$, teda keď AKC je pravouhlý rovnoramenný trojuholník.

Vidíme, že trojuholník ABC vyhovuje podmienkam úlohy práve vtedy, keď je ostrouhlý s uhlom $\alpha = 45°$. Pre *ostré* uhly β a γ potom platí $\beta + \gamma = 135°$.

Záver. Riešením sú trojice uhlov $(\alpha, \beta, \gamma) = (45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, pričom $\varphi \in (0°, 45°)$.

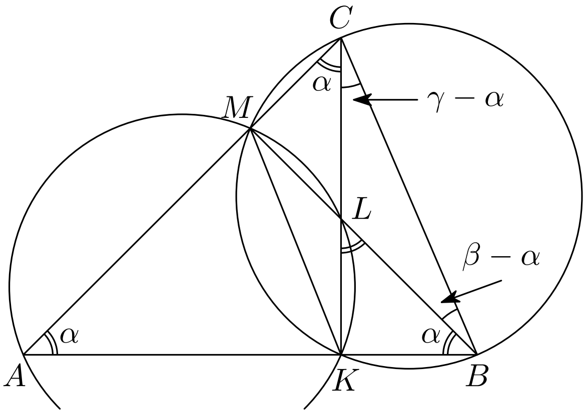
Poznámka. Druhú časť riešenia možno založiť aj na úvahe, že v zadaní uvedené kružnice sú zhodné práve vtedy, keď obvodové uhly MAK a MCK nad ich spoločnou tetivou MK (s vrcholmi v opačných polrovinách určených priamkou MK) majú rovnakú veľkosť. Keďže tieto uhly sú vnútornými uhlami pravouhlého trojuholníka AKC, rovnakú veľkosť majú práve vtedy, keď $\alpha = 45°$.

Iné riešenie. Nech K, M sú vnútorné body strán AB, AC trojuholníka ABC, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy. Vzhľadom na to, že kružnice opísané štvoruholníkom

$AKLM$, $KBCM$ sú zhodné, zhodujú sa aj príslušné obvodové uhly nad spoločnou tetivou KM oboch kružníc[1] (obr. 2):

$$|\angle KCM| = |\angle KBM| = |\angle KAM| = \alpha.$$

Odtiaľ $|\angle MBC| = \beta - \alpha$ a $|\angle KCB| = \gamma - \alpha$, a preto α je najmenším vnútorným uhlom uvažovaného trojuholníka.



Obr. 2

Keďže $AKLM$ je tetivový štvoruholník, je vnútorný uhol pri vrchole A zhodný s vedľajším uhlom pri protiľahlom vrchole L, t. j. platí

$$\alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \alpha), \quad \text{čiže} \quad 3\alpha = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha.$$

Odtiaľ vychádza $\alpha = 45^\circ$. Trojuholník ABM je teda rovnako ako trojuholník ACK rovnoramenný pravouhlý, takže CK a BM sú výšky trojuholníka ABC a bod L je jeho priesečníkom výšok. A keďže bod L leží vnútri trojuholníka ABC, je trojuholník ABC ostrouhlý.

Vzhľadom na to, že $\alpha = 45^\circ$ je najmenším z vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ľahko nahliadneme, že hľadané trojice (α, β, γ) majú tvar $(45^\circ, 45^\circ + \varphi, 90^\circ - \varphi)$, pričom pre parameter φ platí $0^\circ < \varphi < 45^\circ$.

Naopak, v každom ostrouhlom trojuholníku ABC s uhlom 45° pri vrchole A, pre ktorého zvyšné uhly platí $\beta + \gamma = 135^\circ$, majú zrejme päty výšok K, M z vrcholov C a B požadované vlastnosti, pretože oba štvoruholníky $AKLM$, $KBCM$ sú tetivové podľa Tálesovej vety a z rovnosti uhlov $|\angle KCM| = |\angle KAM| = 45^\circ$ nad spoločnou tetivou KM vyplýva, že im opísané kružnice sú zhodné.

---

2. *Určte všetky trojice prvočísel (p, q, r), pre ktoré platí*

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr.$$

(*Jaromír Šimša*)

[1] Dve zhodné kružnice so spoločnou tetivou môžu byť buď totožné, alebo súmerne združené podľa spoločnej tetivy; prvá možnosť tu neprichádza do úvahy.

Riešenie. Ukážeme, že danej rovnici vyhovujú práve tri trojice prvočísel (p, q, r), a to $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Danú rovnicu najskôr upravíme na tvar

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{r}\right)=4.$$

Keďže $3^3 < 4 \cdot 2^3$, musí byť aspoň jeden z troch činiteľov na ľavej strane upravenej rovnice väčší ako $\frac{3}{2}$. Pre prvočísla p, q, r tak nutne platí $p < 2$ alebo $q < 4$ alebo $r < 6$. Vzhľadom na to, že neexistuje žiadne prvočíslo menšie ako 2, zostáva prešetriť nasledujúcich päť možností: $q \in \{2, 3\}$ a $r \in \{2, 3, 5\}$. Ty teraz rozoberieme jednotlivo, pritom uvažovanú hodnotu q či r vždy dosadíme do danej rovnice, ktorú potom (v obore prvočísel) vyriešime pre zostávajúce dve neznáme.

- ▷ Pre $q = 2$ dostaneme $(p + 1)(r + 3) = 2pr$, odkiaľ vyplýva $r = 3 + 6/(p - 1)$, čo je celé číslo len pre prvočísla $p \in \{2, 3, 7\}$. Im však prislúchajú $r \in \{9, 6, 4\}$, ktoré nie sú prvočíslami.
- ▷ Pre $q = 3$ dostaneme $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$, odkiaľ vyplýva, že $p = 5$ alebo $r = 5$. Pre $p = 5$ dostaneme riešenie $(5, 3, 3)$ a pre $r = 5$ riešenie $(2, 3, 5)$.
- ▷ Pre $r = 2$ dostaneme $5(p + 1)(q + 2) = 8pq$, odkiaľ vyplýva, že $p = 5$ alebo $q = 5$. Pre $p = 5$ nedostaneme žiadne riešenie v obore prvočísel, zatiaľ čo pre $q = 5$ dostávame tretie riešenie danej rovnice, ktorým je trojica $(7, 5, 2)$.
- ▷ Pre $r = 3$ dostaneme $(p+1)(q+2) = 2pq$, odkiaľ $q = 2+4/(p - 1)$, čo je celé číslo iba pre prvočísla $p \in \{2, 3, 5\}$. Medzi prislúchajúcimi hodnotami $q \in \{6, 4, 3\}$ je jediné prvočíslo, pre ktoré dostávame riešenie $(p, q, r) = (5, 3, 3)$, ktoré už poznáme.
- ▷ Pre $r = 5$ dostaneme $2(p + 1)(q + 2) = 5pq$, odkiaľ vyplýva, že $p = 2$ alebo $q = 2$. Pre $p = 2$ dostávame už známe riešenie $(2, 3, 5)$, zatiaľ čo pre $q = 2$ vychádza $p = 4$.

Iné riešenie. Pre každé prvočíslo q platí nerovnosť $q + 2 \leqq 2q$. Pre prvočísla p a r tak dostaneme nerovnicu $2(p + 1)(r + 3) \geqq 4pr$, ktorú upravíme na tvar $(p - 1)(r - 3) \leqq 6$. Keďže $p - 1 \geqq 1$, musí byť $r - 3 \leqq 6$, čiže $r \leqq 9$. Odtiaľ vyplýva, že nutne $r \in \{2, 3, 5, 7\}$. Postupným rozborom každej z týchto štyroch možností dospejeme (analogicky ako v predchádzajúcom riešení) k trom trojiciam prvočísel (p, q, r): $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$, ktoré sú jedinými riešeniami úlohy.

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $(1 + 1/p)(1 + 2/q)(1 + 3/r) = 4$. Keby bolo $p \geqq 5$, $q \geqq 5$, $r \geqq 5$, tak

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{q}\right)\left(1+\frac{3}{r}\right) \leqq \frac{6}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{8}{5} < 4.$$

Preto aspoň jedno z čísel p ,q, r je z množiny $\{2, 3\}$. Stačí teda preskúmať 6 možností:

- ▷ $p = 2$: Rovnicu $3(q + 2)(r + 3) = 8qr$ upravíme na $(5q - 6)(5r - 9) = 144$, v obore prvočísel je riešenie $q = 3$, $r = 5$.
- ▷ $p = 3$: Rovnicu $4(q+2)(r+3) = 12qr$ upravíme na tvar $(q-1)(2r-3) = 9$, v obore prvočísel nie je riešenie.
- ▷ $q = 2$: Rovnicu $4(p + 1)(r + 3) = 8pr$ upravíme na tvar $(p - 1)(r - 3) = 6$, v obore prvočísel nie je riešenie.
- ▷ $q = 3$: Rovnicu $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$ upravíme na tvar $(7p - 5)(7r - 15) = 180$, v obore prvočísel sú riešenia $p = 5$, $r = 3$ a $p = 2$, $r = 5$.

▷ $r = 2$: Rovnicu $5(p+1)(q+2) = 8pq$ upravíme na tvar $(3p-5)(3q-10) = 80$, v obore prvočísel je riešenie $p = 7$, $q = 5$.

▷ $r = 3$: Rovnicu $6(p+1)(q+2) = 12pq$ upravíme na tvar $(p-1)(q-2) = 4$, v obore prvočísel je riešenie $p = 5$, $q = 3$.

Záver. V obore prvočísel sú riešením zadanej rovnice nasledovné trojice (p, q, r): $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Poznámka. V obore kladných celých čísel má rovnica až 28 riešení, z toho 13 v obore celých čísel väčších ako 1($(2, 2, 9)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 6, 3)$, $(2, 30, 2)$, $(3, 2, 6)$, $(3, 4, 3)$, $(3, 10, 2)$, $(4, 2, 5)$, $(5, 3, 3)$, $(5, 6, 2)$, $(7, 2, 4)$, $(7, 5, 2)$, $(15, 4, 2)$).

---

3. *Predpokladajme, že reálne čísla x, y, z vyhovujú sústave rovníc*

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokážte, že potom platí nasledujúce tvrdenie:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je aspoň 9, avšak nanajvýš 25.

b) Niektoré z čísel x, y, z je nanajvýš 3 a iné z nich je aspoň 5. (Jaromír Šimša)

Riešenie. a) Podľa zadania platí $(x+y)^2 = (12-z)^2$ a $x^2 + y^2 = 54 - z^2$, teda

$$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = (12-z)^2 - (54-z^2) = 2\big((z-6)^2 + 9\big) \tag{1}$$

a

$$0 \leqq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 54 - z^2 - 2\big((z-6)^2 + 9\big) = -3\big((z-4)^2 - 4\big). \tag{2}$$

Z (1) vyplýva $xy = (z-6)^2 + 9 \geqq 9$, z (2) nerovnosť $(z-4)^2 \leqq 4$, čiže $2 \leqq z \leqq 6$. Preto $(z-6)^2 \leqq (2-6)^2 = 16$, čo spolu s (1) dáva $xy = (z-6)^2 + 9 \leqq 25$. Vzhľadom na symetriu platia odvodené nerovnosti $9 \leqq xy \leqq 25$ aj pre súčiny yz, zx namiesto xy.

b) Z danej sústavy rovníc dostávame

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = \frac{12^2 - 54}{2} = 45.$$

Ďalej platí

$$\begin{aligned}(x-3)(y-3) + (y-3)(z-3) + (z-3)(x-3) &= \\ = xy + yz + zx - 6(x+y+z) + 27 &= 45 - 6 \cdot 12 + 27 = 0.\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že čísla $x-3$, $y-3$, $z-3$ nemôžu byť súčasne všetky kladné, aspoň jedno z čísel x, y, z je teda nanajvýš 3. Podobne zo vzťahu

$$\begin{aligned}(x-5)(y-5) + (y-5)(z-5) + (z-5)(x-5) &= \\ = xy + yz + zx - 10(x+y+z) + 75 &= 45 - 10 \cdot 12 + 75 = 0\end{aligned}$$

vidíme, že čísla $x-5$, $y-5$, $z-5$ nemôžu byť súčasne všetky záporné, preto minimálne jedno z čísel x, y, z je aspoň 5.

Iné riešenie. Náročnejší trik v časti b) predošlého riešenia môžeme nahradiť dôkazom implikácií

$$(x > 3) \wedge (y > 3) \Rightarrow z < 3 \qquad \text{a} \qquad (x < 5) \wedge (y < 5) \Rightarrow z > 5.$$

Uvažujme kvadratický trojčlen $F(t) = (t - x)(t - y)$. Ak sú oba jeho korene x a y väčšie ako 3, platí $F(3) > 0$. Avšak podľa zadania a (1) platí

$$0 < F(3) = 3^2 - 3(x + y) + xy = 9 - 3(12 - z) + (z - 6)^2 + 9 = (z - 3)(z - 6).$$

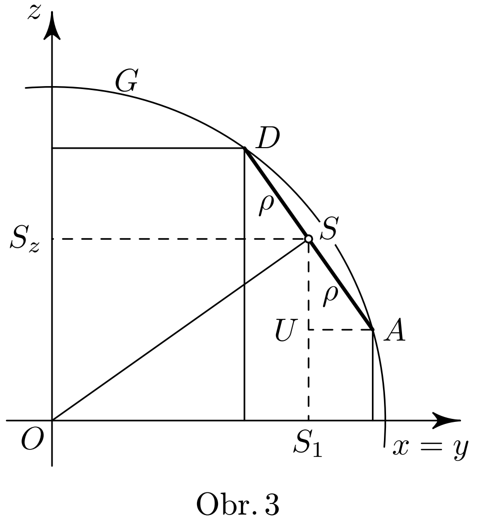
Z tejto nerovnosti a z odhadu $z \leqq 6$ dokázaného v časti a) predošlého riešenia tak dostávame požadovaný odhad $z < 3$. Podobne, ak sú obe čísla x a y menšie ako 5, tak $F(5) > 0$. Avšak podľa zadania a (1) platí

$$0 < F(5) = 5^2 - 5(x + y) + xy = 25 - 5(12 - z) + (z - 6)^2 + 9 = (z - 2)(z - 5).$$

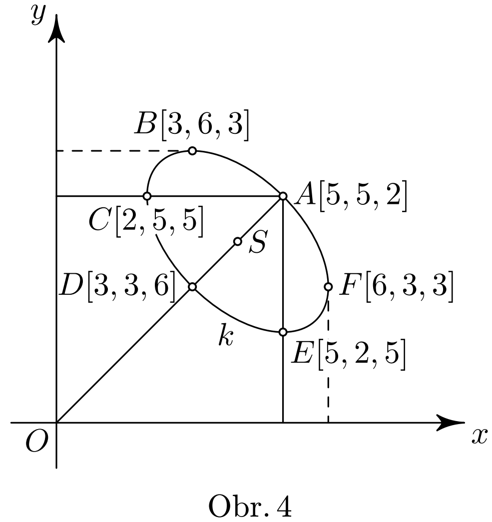
Z tejto nerovnosti a odhadu $z \geqq 2$ dokázaného v časti a) predošlého riešenia tak dostávame požadovaný odhad $z > 5$.

Iné riešenie. Vyriešime časť b) geometricky. V karteziánskej sústave súradníc s počiatkom O a osami x, y, z určuje prvá rovnica rovinu σ, ktorá prechádza bodom $S = [4, 4, 4]$ a je kolmá na úsečku OS, zatiaľ čo druhá rovnica je rovnicou guľovej plochy $G(O, r = \sqrt{54})$. Prienikom oboch útvarov je kružnica $k(S, \varrho)$. Určíme najskôr jej polomer a priesečníky kružnice s rovinou, podľa ktorej sú osi x a y súmerne združené.

Označme S_x, S_y a S_z kolmé priemety bodu S do súradnicových osí x, y a z. Na obr. 3 je rez rovinou OSS_z. Platí $|OS_1| = 4\sqrt{2}$, $|OS| = 4\sqrt{3}$ (stenová a telesová uhlopriečka kocky s hranou dĺžky 4) a $|OA| = \sqrt{54}$. Z pravouhlého trojuholníka OAS pomocou Pytagorovej vety určíme $\varrho = |SA| = \sqrt{6}$ a z podobnosti trojuholníkov $SAU \sim OSS_1$ dostaneme $|US| = 2$ a $|AU| = \sqrt{2}$. Odtiaľ $A = [5, 5, 2]$ a (vďaka symetrii podľa S) $D = [3, 3, 6]$.



Obr. 3



Obr. 4

Analogickým rozborom pre roviny OSS_y a OSS_x (alebo len cyklickou zámenou, ktorú možno vzhľadom k symetriu použiť) nájdeme ich priesečníky s kružnicou k:

$$B = [3,6,3], \quad E = [5,2,5] \quad \text{a} \quad C = [2,5,5], \quad F = [6,3,3].$$

Nájdené body A, B, C, D, E, F rozdeľujú kružnicu k na šesť oblúkov (obr. 4 znázorňuje pohľad na kružnicu k v smere osi z), pre ktorých body zrejme platí:

$$\begin{aligned}
[x,y,z] \in \widehat{AB} \ &\Rightarrow\ 2 \leqq z \leqq 3,\ 5 \leqq y \leqq 6,\ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{BC} \ &\Rightarrow\ 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq y \leqq 6,\ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{CD} \ &\Rightarrow\ 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq z \leqq 6,\ 3 \leqq y \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{DE} \ &\Rightarrow\ 2 \leqq y \leqq 3,\ 5 \leqq z \leqq 6,\ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{EF} \ &\Rightarrow\ 2 \leqq y \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6,\ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{FA} \ &\Rightarrow\ 2 \leqq z \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6,\ 3 \leqq y \leqq 5.
\end{aligned}$$

Tým je však tvrdenie b) dokázané.

Iné riešenie. a) Dosadením z prvej rovnice do druhej dostaneme

$$x^2 + y^2 + xy - 12x - 12y + 45 = 0 \qquad \text{a odtiaľ} \qquad x = \frac{12 - y \pm \sqrt{-3y^2 + 24y - 36}}{2}.$$

Preto $-3y^2 + 24y - 36 \geqq 0$, takže $2 \leqq y \leqq 6$. Ďalej máme

$$2xy = 12y - y^2 \pm y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36}.$$

Pripusťme, že $2xy < 18$. Potom $12y - y^2 - y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} < 18$ čiže

$$0 < 12y - y^2 - 18 < y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36},$$

odkiaľ po umocnení a úprave dostaneme $(y-3)^4 < 0$, čo však nie je možné.

Podobne z nerovnosti $2xy > 50$ by vyplývalo

$$\begin{aligned}
12y - y^2 + y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> 50,\\
y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> y^2 - 12y + 50 > 0,
\end{aligned}$$

a po umocnení a úprave $(y^2 - 2y + 25)(y-5)^2 < 0$, čo tiež neplatí.

Preto $9 \leqq xy \leqq 25$ a vzhľadom na symetriu aj $9 \leqq yz \leqq 25$ a $9 \leqq zx \leqq 25$.

b) Položme $x = 4 + a$, $y = 4 + b$, $z = 4 + c$. Potom $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $|a| \geqq |b| \geqq |c|$. Potom čísla a a b majú opačné znamienka a $a^2 \geqq 2$, preto $|a| \geqq \sqrt{2}$ (dá sa dokázať dokonca $|a| \geqq \sqrt{3}$), a teda $x \leqq 4 - \sqrt{2} < 3$ alebo $x \geqq 4 + \sqrt{2} > 5$. Z nerovnosti $|b| < 1$ by vyplývalo $|c| < 1$, ale potom $|a| \leqq |b| + |c| < 2$ a $a^2 + b^2 + c^2 < 6$; preto $|b| \geqq 1$. Môžu teda nastať dva prípady:

- ▷ Ak $a > 0$, tak $b < 0$, teda $b \leqq -1$; preto $x > 5$ a $y \leqq 3$.
- ▷ Ak $a < 0$, tak $b > 0$, teda $b \geqq 1$; preto $x < 3$ a $y \geqq 5$.

4. *Uvažujme kvadratický trojčlen ax^2+bx+c s reálnymi koeficientmi $a \geqq 2$, $b \geqq 2$, $c \geqq 2$. Adam a Boris hrajú nasledujúcu hru: Ak je na ťahu Adam, vyberie jeden z koeficientov trojčlena a nahradí ho súčtom zvyšných dvoch. Ak je na ťahu Boris, vyberie jeden z koeficientov a nahradí ho súčinom zvyšných dvoch. Adam začína a hráči sa pravidelne striedajú. Hru vyhráva ten, po ktorého ťahu má vzniknutý trojčlen dva rôzne reálne korene. V závislosti od koeficientov a, b, c počiatočného trojčlena určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.* (Michal Rolínek)

Riešenie. Ak Adam nahradí koeficient pri lineárnom člene, získa trojčlen $ax^2 + (a+c)x + c$, ktorý má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jeho diskriminant $(a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$ kladný. To nastane práve vtedy, keď $a \neq c$. V tomto prípade vyššie opísaným ťahom Adam zvíťazí. Ak Adam nahradí koeficient pri absolútnom člene, získa trojčlen $ax^2 + bx + (a+b)$, ktorý má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jeho diskriminant $b^2 - 4a(a+b) = \big(b(1+\sqrt{2}) + 2a\big)\big(b(\sqrt{2}-1) - 2a\big)$ kladný. Vzhľadom na podmienky úlohy to nastane práve vtedy, keď $b(\sqrt{2}-1) > 2a$. Keďže diskriminant kvadratického trojčlena je symetrická funkcia koeficientov pri kvadratickom a absolútnom člene, nastane rovnaká situácia aj v prípade, keď Adam nahradí koeficient pri kvadratickom člene.

Zhrňme úvahy z predošlého odseku. Ak $a \neq c$ alebo $b > \frac{2}{\sqrt{2}-1}a = 2(\sqrt{2}+1)a$, môže Adam svojím prvým ťahom vyhrať.

Predpokladajme, že $a = c$ a súčasne $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$. Po Adamovi je na ťahu Boris, ktorý bude nahrádzať koeficienty jedného z trojčlenov

a) $ax^2 + bx + (a+b)$ alebo $(a+b)x^2 + bx + a$, b) $ax^2 + 2ax + a$.

a) Ak v tomto prípade nahradí Boris koeficient pri lineárnom člene, dostane jeden z trojčlenov $ax^2 + a(a+b)x + (a+b)$ alebo $(a+b)x^2 + a(a+b)x + a$, ktoré majú oba diskriminant $a^2(a+b)^2 - 4a(a+b) = a(a+b)\,(a(a+b) - 4)$, ktorý je vzhľadom na podmienky $a \geqq 2$, $b \geqq 2$ kladný. Preto Boris týmto ťahom zvíťazí.

b) Ak Boris nahradí koeficient pri lineárnom člene, dostane kvadratický trojčlen $ax^2 + a^2x + a$, ktorý má dva reálne korene práve vtedy, keď je jeho diskriminant $a^4 - 4a^2 = a^2(a+2)(a-2)$ kladný. Vzhľadom na podmienky úlohy to nastane práve vtedy, keď $a > 2$. Keby Boris v prípade $a = 2$ nahradil koeficient pri kvadratickom alebo absolútnom člene, zanechal by Adamovi jeden z trojčlenov $8x^2 + 4x + 2$ alebo $2x^2 + 4x + 8$. Z úvah v prvom odseku vyplýva, že v takom prípade by zvíťazil Adam. Preto v prípade $a = 2$ musí Boris, aby neprehral, nahradiť koeficient pri lineárnom člene, a zanechá tak Adamovi trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Z odsekov a) a b) vyplýva: Ak Adam nemôže zvíťaziť prvým ťahom, môže svojím ťahom zvíťaziť Boris práve vtedy, keď $a \neq 2$. V prípade $a = 2$ svojím prvým ťahom Boris neprehrá, len ak po ňom zanechá trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Zatiaľ teda nepoznáme víťaznú stratégiu niektorého z hráčov, ak po prvom Borisovom ťahu zostane trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. Z predošlých úvah vyplýva, že Adam neprehrá, len ak nahradí koeficient pri lineárnom člene, takže zanechá súperovi rovnaký trojčlen. Na tento trojčlen musí Boris, aby neprehral, reagovať náhradou koeficientu pri lineárnom člene, teda aj on zanechá rovnaký trojčlen a hra v tomto prípade nemá pri správnej hre oboch hráčov víťaza.

Záver. Pre trojčlen $ax^2 + bx + c$ platí:

▷ Ak $a \neq c$ alebo $b > 2(\sqrt{2}+1)a$, má víťaznú stratégiu Adam a môže prvým ťahom vyhrať.

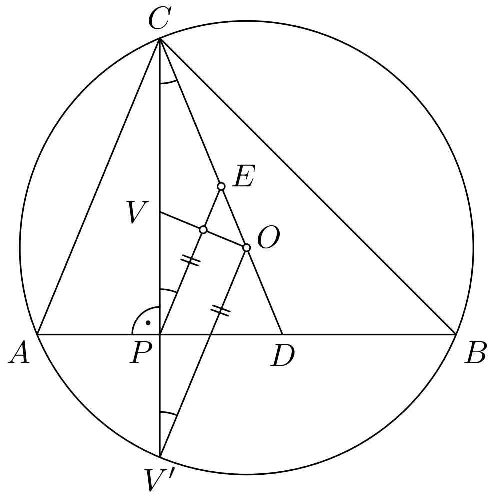
▷ Ak $a = c > 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$, má víťaznú stratégiu Boris a môže svojím prvým ťahom vyhrať.

▷ Ak $a = c = 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$, musia obaja hráči, aby neprehrali, v každom ťahu zanechať trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. V tomto prípade žiadny z hráčov nemá víťaznú stratégiu.

---

5. *V ostrouhlom trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný, označme P pätu výšky z vrcholu C na stranu AB, V priesečník výšok, O stred kružnice opísanej, D priesečník polpriamky CO so stranou AB a E stred úsečky CD. Dokážte, že priamka EP prechádza stredom úsečky OV.* (*Karel Horák*)

Riešenie. Ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB, leží celá úsečka OV



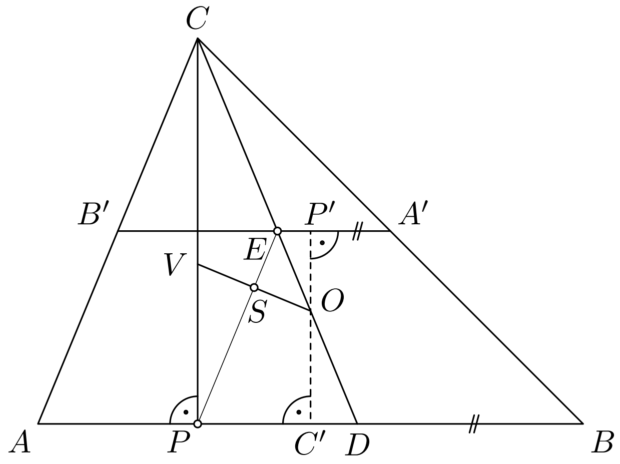
Obr. 5

na priamke EP a tvrdenie platí triviálne. V ďalších úvahách teda môžeme predpokladať, že $|AC| \neq |BC|$, čiže priamky CV, CO nie sú totožné.

Je známe, že bod V' súmerne združený s priesečníkom výšok V podľa strany AB uvažovaného trojuholníka ABC leží na kružnici tomuto trojuholníku opísanej, preto je bod P stredom úsečky VV' (obr. 5). Trojuholník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavným vrcholom O, a keďže stred E úsečky CD je súčasne stredom kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku CPD s preponou CD, je aj trojuholník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojuholníky $CV'O$ a CPE sú pritom rovnoľahlé (so stredom rovnoľahlosti v bode C) – zhodujú sa totiž v spoločnom uhle pri základni a body C, P, V' ležia na jednej priamke rovnako ako body C, E, O. Preto $PE \parallel V'O$.

Keďže P je stredom strany VV' trojuholníka $V'OV$, leží na priamke PE stredná priečka tohto trojuholníka, ktorá je rovnobežná s jeho stranou $V'O$. Priamka PE teda pretína úsečku OV v jej strede, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme S stred úsečky OV a A', B', C' postupne stredy strán BC, CA, AB. Bod O je zrejme ortocentrom ostrouhlého trojuholníka $A'B'C'$, ktorý je podobný s trojuholníkom ABC. Preto O leží vnútri trojuholníka $A'B'C'$ a bod E leží vnútri úsečky OC (na jej priesečníku s priečkou $A'B'$). Keďže S leží vnútri úsečky OV a P



Obr. 6

leží mimo úsečky CV (obr. 6), na dôkaz toho, že body P, S, E ležia na jednej priamke, stačí podľa Menelaovej vety aplikovanej na trojuholník VOC ukázať, že súčin

$$s = \frac{|VS|}{|SO|} \cdot \frac{|OE|}{|EC|} \cdot \frac{|CP|}{|VP|} \tag{1}$$

je rovný 1. Avšak $|VS| = |SO|$ a ak označíme P' pätu kolmice spustenej z bodu O na priečku $A'B'$, z podobnosti trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ máme $|CP| : |VP| = |C'P'| : : |OP'|$ (keďže O je ortocentrom trojuholníka $A'B'C'$). Navyše $|EC| = |DE|$, takže po dosadení do (1) dostávame

$$s = 1 \cdot \frac{|OE|}{|DE|} \cdot \frac{|C'P'|}{|OP'|} = 1.$$

Posledná rovnosť platí vďaka tomu, že bod O delí každú úsečku majúcu jeden krajný bod na strane AB a druhý na priečke $A'B'$ (rovnobežnej s AB) v rovnakom pomere, t. j. $|OE| : |DE| = |OP'| : |C'P'|$.

Iné riešenie. Uvažujme rovnaké označenie bodov ako v predošlom riešení. Odlišným spôsobom ukážeme, že súčin (1) je rovný 1. Ak označíme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom, tak $|\measuredangle COA'| = \alpha$, $|\measuredangle OA'E| = 90^\circ - \beta$, $|\measuredangle EA'C| = \beta$, $|\measuredangle OCA'| = 90^\circ - \alpha$, takže zo sínusových viet v trojuholníkoch EOA' a ECA' máme

$$\frac{|OE|}{|EC|} = \frac{\dfrac{|EA'|}{\sin\alpha} \cdot \sin(90^\circ - \beta)}{\dfrac{|EA'|}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \sin\beta} = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta.$$

Avšak $|\measuredangle AVP| = \beta$, odkiaľ $|VP| = |AP| / \operatorname{tg}\beta$; a zároveň $|CP| = |AP| \cdot \operatorname{tg}\alpha$, teda $|CP| : |VP| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$. Spolu dostávame

$$s = 1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Iné riešenie. Zvoľme v rovine karteziánsku súradnicovú sústavu s počiatkom v bode P, a s x-ovou osou totožnou s priamkou AB. Teda $P = [0, 0]$ a pre vhodné $a < 0$, $b > 0$ a $c > 0$ platí $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [0, c]$. Postupne ľahko vypočítame súradnice bodov V, O, D, E a stredu S úsečky VO (zrejme všetky menovatele sú nenulové):

$$V = \left[0, -\frac{ab}{c}\right], \qquad O = \left[\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right], \qquad D = \left[\frac{c^2(a+b)}{c^2-ab}, 0\right],$$
$$E = \left[\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)}, \frac{c}{2}\right], \qquad S = \left[\frac{a+b}{4}, \frac{c^2-ab}{4c}\right].$$

Overenie, že S leží na priamke PE, sa tak redukuje na overenie triviálnej identity

$$\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)} : \frac{c}{2} = \frac{a+b}{4} : \frac{c^2-ab}{4c}.$$

Iné riešenie. Zvoľme v rovine karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [c_1, c_2]$, pričom $c_2 > 0$, $0 < c_1 < 1$. Potom

$$O = \left[\frac{1}{2}, \frac{c_1^2 - c_1 + c_2^2}{2c_2}\right], \; P = [c_1, 0], \; V = \left[c_1, \frac{c_1 - c_1^2}{c_2}\right], \; S = \left[\frac{c_1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{c_2^2 + c_1 - c_1^2}{4c_2}\right],$$
$$D = \left[\frac{c_1^2 + c_2^2 - c_1^3 - c_1c_2^2}{c_2^2 + c_1 - c_1^2}, 0\right], \quad E = \left[\frac{2c_1^2 - 2c_1^3 + c_2^2}{2\left(c_1 - c_1^2 + c_2^2\right)}, \frac{c_2}{2}\right].$$

Stačí už len overiť lineárnu závislosť vektorov $S - P$ a $E - P$, teda rovnosť

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{c_1}{2}}{\frac{c_2^2 + c_1 - c_1^2}{4c_2}} = \frac{\frac{2c_1^2 - 2c_1^3 + c_2^2}{2\left(c_1 - c_1^2 + c_2^2\right)} - c_1}{\frac{c_2}{2}}.$$

Iné riešenie. Ak $b = |AC| = |BC| = a$, ležia všetky štyri body P, E, O, V na jednej priamke a na nej leží aj stred úsečky OV.

Nech teda napríklad $b > a$. Platí $|\measuredangle ACO| = |\measuredangle PCB| = 90^\circ - \beta$, a teda $|\measuredangle DCP| = \beta - \alpha$. Bod E je stred prepony CD pravouhlého trojuholníka CDP, preto $|\measuredangle DPE| = |\measuredangle PDE| = 90^\circ + \alpha - \beta$.

Označme r polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, S stred úsečky OV a F, G päty kolmíc z bodov O, S na priamku AB. Potom $|OF| = r\cos\gamma = \frac{1}{2}c\operatorname{cotg}\gamma$, $|PB| = a\cos\beta$, $|PV| = a\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha$, $|SG| = \frac{1}{2}(|OF| + |PV|) = \frac{1}{4}c\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{2}a\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha$, $|GP| = \frac{1}{2}(|FB| - |PB|) = \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}a\cos\beta$,

$$\operatorname{tg}|\measuredangle GPS| = \frac{|SG|}{|GP|} = \frac{\frac{1}{4}c\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{2}a\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha}{\frac{1}{4}c - \frac{1}{2}a\cos\beta} = \frac{\frac{1}{4}c\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{2}\frac{c}{\sin\gamma}\cos\beta\cos\alpha}{\frac{1}{4}c - \frac{1}{2}\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\beta} =$$
$$= \frac{\cos\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma - 2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{-\cos(\alpha+\beta) + 2\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta} = \operatorname{cotg}(\beta - \alpha) = \operatorname{tg}|\measuredangle DPE|;$$

odtiaľ $|\measuredangle GPS| = |\measuredangle DPE|$, a teda body S, P a E ležia na jednej priamke.

6. *Označme* $\mathbb{R}^+$ *množinu všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *také, že pre ľubovoľné* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *platí*

$$f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f\bigl(x \cdot f(y)\bigr) + \frac{1}{xy}.$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Ukážeme, že jediná funkcia f, ktorá spĺňa podmienky úlohy, je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Zo zadania vyplýva, že $f(y) \neq 0$ pre každé $y > 0$, teda

$$f\bigl(x\,f(y)\bigr) = f(x) - \frac{1}{xy\,f(y)}. \tag{1}$$

Označme $f(1) = a > 0$. Voľbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (1) postupne dostaneme

$$f\bigl(f(y)\bigr) = f(1) - \frac{1}{y\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+), \tag{2}$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax} \qquad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{3}$$

Voľbou $x = 1$ v rovnici (3) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Voľbou $x = a$ v rovnici (1) a použitím (4) dostaneme

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f(a) - \frac{1}{ay\,f(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ay\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+),$$

zatiaľ čo pomocou vzťahov (3) a (2) môžeme ľavú stranu predošlej rovnice upraviť na tvar

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f\bigl(f(y)\bigr) - \frac{1}{a\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{a\,f(y)}.$$

Porovnaním pravých strán predošlých dvoch rovníc vypočítame

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \qquad (y \in \mathbb{R}^+). \tag{4}$$

Ak teda existuje riešenie danej rovnice, musí mať tvar (4). Dosadením do rovnice v zadaní a následnou úpravou zistíme, že pre všetky kladné reálne x a y má platiť $(a-1)^2 = 1$. Vzhľadom na predpoklad $a > 0$ platí táto rovnosť práve vtedy, keď $a = 2$. Týmto krokom sme zároveň urobili skúšku správnosti nájdeného riešenia.

Iné riešenie. Vzťahy (1) a (2) z predchádzajúceho riešenia môžeme využiť aj nasledujúcim spôsobom. Pre ľubovoľné reálne číslo t je $f(t) > 0$. Voľbou $x = f(t)$ v rovnici (1) obdržíme pomocou (2)

$$f\bigl(f(t)\,f(y)\bigr) = f\bigl(f(t)\bigr) - \frac{1}{f(t)\,y\,f(y)} = a - \frac{1}{t\,f(t)} - \frac{1}{f(t)\,y\,f(y)} \qquad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Zámenou premenných t a y odtiaľ získame

$$f\bigl(f(y)\,f(t)\bigr) = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{f(y)\,t\,f(t)} \qquad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Keďže výrazy na ľavých stranách predošlých dvoch rovníc sú zhodné, musia byť zhodné aj výrazy na pravých stranách, takže platí

$$a - \frac{1}{t\,f(t)} - \frac{1}{f(t)\,y\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{f(y)\,t\,f(t)} \qquad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Úpravou odtiaľ dostaneme

$$t\bigl(f(t) - 1\bigr) = y\bigl(f(y) - 1\bigr) \qquad (t, y \in \mathbb{R}^+).$$

Voľbou $t = 1$ v tejto rovnici získame rovnosť

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \qquad (y \in \mathbb{R}^+),$$

ktorú využijeme rovnako ako v prvom riešení.