
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

1 Je možné vyplniť tabuľku $n \times n$ jednotkami a dvojkami tak, aby bol súčet čísel v každom riadku deliteľný piatimi a súčet čísel v každom stĺpci deliteľný siedmimi? Riešte pre prípady

- a) $n = 9$,
- b) $n = 12$.

(Tomáš Bárta)

2 Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD . Označme k a l kružnice s priemerami BC a AD . Ďalej označme P priesečník priamok BC a AD . Dokážte, že dotyčnice z bodu P ku kružnici k zvierajú rovnaký uhol ako dotyčnice z bodu P ku kružnici l .

(Patrik Bak)

3 Nájdite všetky celé čísla n také, že $n > 2$ a číslo n^{n-2} je n -tá mocnina celého čísla.

(Patrik Bak)

4 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}xy + 1 &= z^2, \\yz + 2 &= x^2, \\zx + 3 &= y^2.\end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

5 Označme I stred kružnice vpísanej do rôznostranného trojuholníka ABC a k kružnicu jemu opísanú. Polpriamky BI a CI pretnú kružnicu k postupne v bodoch S_b a S_c , pričom $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokážte, že dotyčnica ku kružnici k v bode A , priamka vedená bodom I rovnobežne so stranou BC a priamka S_bS_c sa pretínajú v jednom bode.

(Patrik Bak)

6 Uvažujme nekonečnú postupnosť (a_0, a_1, a_2, \dots) celých čísel takú, že $a_0 \geq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pre všetky nezáporné indexy n . Dokážte, že táto postupnosť obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

Termín odovzdania riešení: **30. 11. 2021**
