
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

1 Na párty sa zišlo 20 osôb, z toho 10 chlapcov a 10 dievčat. Každému sa páči práve k osôb opačného pohlavia. Je vždy možné vytvoriť pár, v ktorom sa obom páči ten druhý? Riešte v prípade

- a) $k = 5$;
- b) $k = 6$.

(Josef Tkadlec)

2 Z cifier 1 až 9 vytvoríme 9-ciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom vypočítame súčty všetkých trojíc po sebe idúcich cifier a zapíšeme týchto 7 súčtov vzostupne. Rozhodnite, či možno takto získať postupnosť

- a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22;
- b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23.

(Patrik Bak)

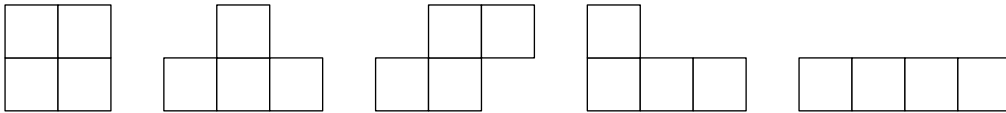
3 Nech T je ťažisko trojuholníka ABC . Nech K je bod polroviny BTC taký, že BTK je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou BT . Nech L je bod polroviny CTA taký, že CTL je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou CT . Označme D stred strany BC a E stred úsečky KL . Určte všetky možné hodnoty pomeru $|AT| : |DE|$.

(Michal Rolínek)

4 O nepárnom prvočíse p povieme, že je *špeciálne*, ak súčet všetkých prvočísel menších ako p je násobkom p . Existujú dve po sebe idúce prvočísla, ktoré sú špeciálne?

(Jaroslav Zhouf)

5 Rozhodnite, či existuje neprázdna podmnožina políčok tabuľky 7×7 taká, že pre každé z *tetramín*



možno túto podmnožinu vyplniť bez prekryvania výlučne jeho kópiami. Jednotlivé kópie môžeme ľubovoľne otáčať a preklápať.

(Michal Rolínek)

6 Pre reálne čísla a, b, c, d z uzavretého intervalu $[1, 2]$ platí $(a + c)(b + d) = 8$. Dokážte, že

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1} \geq 1,$$

a určte, kedy nastane rovnosť.

(Zdeněk Pezlar)

Termín odovzdania riešení: **5. 12. 2023**
