
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie A

1

- N1** Každý z 8 rytierov okolo okrúhleho stola pozná svojich dvoch susedov a nikoho iného. Koľkými spôsobmi možno rytierov rozdeliť na dve skupiny tak, aby mal každý vo svojej skupine práve jedného známeho?
- N2** Vyriešte predchádzajúcu úlohu pre 10 rytierov namiesto 8.
- N3** Každý zo 40 rytierov okolo okrúhleho stola pozná svojich dvoch susedov a nikoho iného. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť rytierov na hrdinov a zloduchov tak, aby každý rytier poznal práve jedného hrdinu?
- N4** V rade na obed stojí $n \geq 4$ žiakov. Každý z nich pozná iba dvoch žiakov, ktorých má priamo pred sebou, a dvoch, ktorých má priamo za sebou (žiaci na krajoch majú známych menej). Pre ktoré n možno žiakov rozdeliť do dvoch skupín tak, aby mal každý vo svojej skupine práve 2 známych?
- D1** Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov. a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole nanajvýš s jedným nepriateľom. b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozdelenia sedí pri každom stole nanajvýš 16 rytierov. (Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: ak A je nepriateľom B , tak aj B je nepriateľom A .)
- D2** Na večierku sa stretlo n osôb, pričom $n \geq 2$. Každá osoba nemá rada práve jednu inú osobu prítomnú na večierku (ale nie nutne vzájomne, t. j. môže sa stať, že A má rád B aj napriek tomu, že B nemá rád A) a má rada všetky ostatné. Dokážte, že hostí možno usadiť k trom stolom takým spôsobom, aby mal každý hosť rád všetky osoby pri svojom stole.
- D3** Pozdĺž kružnice je rozmiestnených 16 reálnych čísel so súčtom 7. Dokážte, že existuje úsek piatich susedných čísel so súčtom aspoň 2. Určte najmenšie k také, že v opísanej situácii možno vždy nájsť úsek k susedných čísel so súčtom aspoň 3.

2

- N1** Dve tetivy delia kruh s obsahom 1 na štyri časti, pričom prvá tetiva delí kruh na dva odseky v pomere obsahov $1 : 2$ a druhá tetiva delí kruh na dva odseky v pomere obsahov $1 : 3$. Dokážte, že obsah niektorej zo 4 častí je o $\frac{5}{12}$ väčší ako obsah inej z častí.
- N2** Dĺžky strán trojuholníka ABC tvoria aritmetickú postupnosť. Označme K, L, M body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami AB, BC, CA . Dokážte, že vzdialenosti $|AK|, |BL|, |CM|$ (v nejakom poradí) tiež tvoria aritmetickú postupnosť. Pomôcka: platí $|AK| = |AM|, |BK| = |BL|, |CL| = |CM|$.
- N3** Dve tetivy delia kruh na štyri časti, pričom tri z týchto častí majú obsahy 5, 7 a 13. Určte obsah zvyšnej časti, ak jedna z tetív prechádza stredom kruhu. Určte všetky možnosti.
- D1** Každý hrane štvorstenu priradíme jedno reálne číslo tak, aby každá stena mala rovnaký súčet čísel svojich troch hrán. Nanajvýš koľko zo šiestich čísel priradených hranám môže byť navzájom rôznych?
- D2** Každý hrane štvorstenu priradíme kladné reálne číslo tak, aby niektoré dve steny mali rovnaký súčet čísel svojich troch hrán a zvyšné dve steny mali rovnaký súčin čísel svojich troch hrán. Nanajvýš koľko zo šiestich čísel priradených hranám môže byť rôznych?
- 3** Zopakujte si pojem rovnoláhlosti. Napr. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz12 alebo *J. Šedivý: Shodnosť a podobnosť v konštrukčných úlohách, ŠMM, 1980* (<https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403977>).
- N1** Pre dané dve pretínajúce sa nezhodné kružnice zostrojte ich spoločné dotyčnice.
- N2** Trojuholník ABC so stranami dĺžok $a = 7, b = 9, c = 12$ má obsah $S = 14\sqrt{5}$ (ako vyplýva z Herónovho vzorca). Vypočítajte a) výšku v_a na stranu a , b) polomer ρ vpísanej kružnice, c) polomer ρ_a kružnice pripísanej strane BC .
- N3** Stredná prieka trojuholníka ABC rovnobežná s jeho stranou BC je dotyčnicou kružnice vpísanej trojuholníku ABC . Vyjadrite a pomocou b a c .
- N4** Priamka p je rovnobežná so stranou BC trojuholníka ABC a prechádza jeho ťažiskom. Označme K, L postupne priesečníky priamky p so stranami AB, AC trojuholníka. Aký je pomer polomerov kružníc k, l vpísaných

postupne trojuholníkom ABC a AKL ?

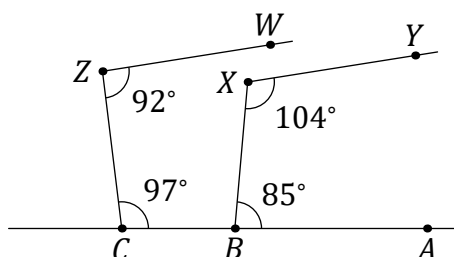
- N5** V situácii z predchádzajúcej úlohy označme q rovnobežku s AC prechádzajúcu stredom kružnice k a Q priesečník priamok q a BC . Ďalej označme r rovnobežku s AC prechádzajúcu stredom kružnice l a R priesečník priamok r a KL . Dokážte, že priamka QR prechádza bodom A .
- D1** V trojuholníku ABC označme D bod dotyku vpísanej kružnice so stranou BC a E bod dotyku kružnice pripísanej strane BC s touto stranou. Dokážte, že stred úsečky DE splýva so stredom úsečky BC .
- D2** V situácii z predošlej úlohy nech je F taký bod kružnice vpísanej trojuholníku ABC , že FD je jej priemer. Dokážte, že body A , F a E ležia na jednej priamke.
- D3** Daný je trojuholník ABC s obsahom S . Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC , je ľubovoľne zvolený bod O . Označme A' , B' , C' postupne obrazy bodov A , B , C v stredovej súmernosti podľa bodu O . Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.
- D4** Je daný trojuholník ABC . Označme T_a bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranou BC a E_a stred kružnice pripísanej strane BC . Podobne definujeme body T_b , E_b a T_c , E_c pre strany CA a AB . Dokážte, že priamky T_aE_a , T_bE_b a T_cE_c prechádzajú jedným bodom.

4

- N1** Riešte v prirodzených číslach rovnicu $(a + b + 1)(a + 5b + 8) = 76$.
- N2** Riešte $(p + q)(p + r + 1) = 143$ pre prvočísla $p > q > r$.
- N3** Určte všetky nenulové prirodzené čísla a s vlastnosťou: $3a + 14$ je násobkom čísla $a + 2$.
- D1** Nájdite všetky dvojice nenulových prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí $a + b + \text{nsd}(a, b) + \text{nsn}(a, b) = 50$.
- D2** Určte všetky dvojice a, b nenulových prirodzených čísel, pre ktoré platí $a \cdot \text{nsn}(a, b) = 4 \cdot \text{nsd}(a, b)$.
- D3** Nájdite všetky dvojice nenulových prirodzených čísel (a, b) takých, že $\text{nsn}(a, b) + \text{nsd}(a, b) = 63$.
- D4** Štyri navzájom rôzne prvočísla p, q, r, s spĺňajú rovnosť $72 + p = q \cdot r \cdot s$. Určte najmenšiu možnú hodnotu p .
- D5** Nájdite všetky nenulové prirodzené čísla, ktoré nie sú mocninou čísla 2 a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1.

5

- N1** Dokážte, že v situácii na obrázku platí $XY \parallel ZW$.



- N2** Uvažujme trojuholník ABC s kružnicou k jemu opísanou a druhý trojuholník XYZ s opísanou kružnicou l . Nech platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$. Potom sú kružnice k a l zhodné práve vtedy, keď $|AC| = |XZ|$.
- N3** Nech ABC je trojuholník, k jemu opísaná kružnica a H priesečník jeho výšok. Označme H' obraz bodu H v osovej súmernosti podľa BC . Dokážte, že $H' \in k$.
- D1** Reimova veta hovorí: *Nech body A, B, Y, X ležia na jednej kružnici. Na priamkach AX a BY sú postupne dané body C a D . Predpokladáme, že body A, B, Y, X, C, D sú navzájom rôzne. Potom body C, D, Y, X ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď priamky AB, CD sú rovnobežné.* Dokážte ju pre prípad, že $ABDC$ je štvoruholník, X leží na úsečke AC a Y na úsečke BD .
- D2** V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existujú postupne body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokážte, že $CD \parallel PQ$.
- D3** Konvexný päťuholník $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé. Uhlopriečky AD a EC sa pretínajú v bode S tak, že $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$. Dokážte, že päťuholník $ABCDE$ má niektoré dve strany rovnobežné.

6 V nasledujúcich úlohách pod deliteľmi myslíme vždy kladné delitele.

- N1** Dokážete pokryť všetky delitele čísla 6 dvoma geometrickými postupnosťami? Dokážete pokryť všetky delitele čísla 24 dvoma geometrickými postupnosťami?
- N2** Nájdite nekonečne veľa čísel, ktorých všetky delitele možno pokryť dvoma geometrickými postupnosťami, ale jednou geometrickou postupnosťou nie.
- N3** Ak má číslo m prvočíselný rozklad $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, tak počet jeho deliteľov je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Dokážte.
- N4** Dokážte, že v prvočíselnom rozklade čísla $n!$ je exponent dvojky väčší alebo rovný exponentu ľubovoľného iného prvočísla.
- N5** Obdĺžnik je rozdelený na 3×5 jednotkových štvorcíkov. Koľko najmenej potrebujeme priamok, aby každým vrcholom každého štvorca prechádzala aspoň jedna priamka?
- N6** Čísla a^4 a a^7 sú racionálne. Musí byť a tiež racionálne? Ak sú racionálne čísla b^4 a b^6 , musí byť racionálne aj b ?
- N7** Euklidov algoritmus je algoritmus na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch či viacerých čísel. Pre každú konečnú postupnosť $d_1, d_2, \dots, d_n$ nenulových prirodzených čísel opakujeme nasledujúci postup: v každom kroku vezmeme dva členy a, b postupnosti také, že $a > b$ (ak také existujú) a väčší člen a nahradíme ich rozdielom $a - b$. Dokážte, že algoritmus skončí po konečne veľa krokoch, a to vo chvíli, keď budú všetky čísla rovné najväčšiemu spoločnému deliteľovi pôvodných čísel $d_1, \dots, d_n$.
- D1** Pre celé číslo $n \geq 3$ definujeme postupnosť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ako postupnosť exponentov v prvočíselnom rozklade $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú prvočísla. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré je

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ geometrická postupnosť.

- D2** Predpokladajme, že $a_1 < a_2 < \dots < a_{2024}$ je aritmetická postupnosť kladných celých čísel a postupnosť $b_1 < b_2 < \dots < b_{2024}$ je geometrická postupnosť kladných celých čísel. Určte najväčší možný počet celých čísel, ktoré sa môžu vyskytovať v oboch postupnostiach zároveň, a to cez všetky možné voľby týchto dvoch postupností.
- D3** Na tabuli je napísaných 2026 (nie nutne rôznych) celých čísel väčších ako 1. V každom ťahu Konfucius vyberie dve čísla $m > 1$ a $n > 1$ z rôznych miest na tabuli a nahradí ich číslami $\text{nsd}(m, n)$ a $\frac{\text{nsn}(m, n)}{\text{nsd}(m, n)}$. Tak pokračuje, kým môže. a) Dokážte, že nezávisle od postupu Konfucius po konečnom počte ťahov skončí, t. j. na tabuli zostane jediné číslo väčšie ako jedna. b) Dokážte, že hodnota tohto čísla je tiež nezávislá od Konfuciovho postupu.
-

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie A

1

- N1** Každý z 8 rytierov okolo okrúhleho stola pozná svojich dvoch susedov a nikoho iného. Koľkými spôsobmi možno rytierov rozdeliť na dve skupiny tak, aby mal každý vo svojej skupine práve jedného známeho?

Riešenie:

Dvoma spôsobmi. Ak sú dvaja susedia v rovnakej skupine, tak sú dvaja rytieri naľavo od nich nutne obaja v tej druhej. Očíslujme rytierov číslami 1 až 8 v smere hodinových ručičiek. Ak je 1 v skupine s 2 (označme ju A), tak 3, 4 sú v opačnej skupine (označme ju B) a ďalej nutne 5, 6 sú v A a 7, 8 sú v B a toto rozdelenie vyhovuje. Podobne ak je 1 v skupine s 8, získame druhé možné rozdelenie. Poznamenajme, že rytieri sú navzájom rozlíšiteľní, preto ich môžeme očíslovať. Naopak skupiny rozlíšiteľné nie sú – ak by sme zamenili skupiny A a B , dostali by sme rovnaké rozdelenie. Preto sme ako A označili tú skupinu, v ktorej sa nachádza rytier 1.

- N2** Vyriešte predchádzajúcu úlohu pre 10 rytierov namiesto 8.

Riešenie:

Ani jedným spôsobom. Ak by bolo možné rytierov požadovaným spôsobom rozdeliť, museli by rytieri tvoriť dvojice podobne ako v predchádzajúcej úlohe, t. j. niektorí dvaja susední rytieri by boli v skupine A , ďalšia dvojica nutne v skupine B a tak ďalej. Keďže je však dvojíc nepárny počet, bola by posledná dvojica v rovnakej skupine ako tá prvá, čo nie je možné, pretože obe dvojice spolu susedia a nutne by potom existoval rytier, ktorý by mal vo svojej skupine oboch svojich známych.

- N3** Každý zo 40 rytierov okolo okrúhleho stola pozná svojich dvoch susedov a nikoho iného. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť rytierov na hrdinov a zloduchov tak, aby každý rytier poznal práve jedného hrdinu?

Riešenie:

Štyrmi. Podobne ako v predchádzajúcich úlohách sa musia okolo stola pravidelne striedať páry hrdinov s párami zloduchov. Keďže sú ale skupiny rozlíšiteľné (jedni sú hrdinovia a druhí zloduchovia), dostávame na rozdiel od prvej návodnej úlohy 4 možnosti: 1. hrdinovia sú rytieri 1 a 2, 2. hrdinovia sú rytieri 2 a 3, 3. rytieri 3 a 4, 4. rytieri 4 a 5.

- N4** V rade na obed stojí $n \geq 4$ žiakov. Každý z nich pozná iba dvoch žiakov, ktorých má priamo pred sebou, a dvoch, ktorých má priamo za sebou (žiaci na krajoch majú známych menej). Pre ktoré n možno žiakov rozdeliť do dvoch skupín tak, aby mal každý vo svojej skupine práve 2 známych?

Riešenie:

Pre n deliteľné tromi. Prvý žiak musí byť v skupine s oboma žiakmi za ním, sú to jeho jediní známi. Títo dvaja už majú v skupine 2 známych, takže ďalší dvaja v rade (4. a 5.) musia byť v druhej skupine, a tiež 6., inak by tam 4. nemal dvoch známych. Z rovnakého dôvodu musí byť 7. až 9. žiak v prvej skupine, 10. až 12. v druhej a tak ďalej. Žiakov je teda potrebné rozdeľovať do dvoch skupín po trojiciach. Keďže rovnaký proces musí fungovať aj keď začneme od posledného žiaka, musí byť n deliteľné tromi. Pre každé n deliteľné tromi bude takéto rozdelenie po trojiciach spĺňať podmienku zo zadania.

- D1** Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov. a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole nanajvýš s jedným nepriateľom. b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozsadenia sedí pri každom stole nanajvýš 16 rytierov. (Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: ak A je nepriateľom B , tak aj B je nepriateľom A .)

Riešenie:

51-C-I-6 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=279#page=4>)

- D2** Na večierku sa stretlo n osôb, pričom $n \geq 2$. Každá osoba nemá rada práve jednu inú osobu prítomnú na večierku (ale nie nutne vzájomne, t. j. môže sa stať, že A má rád B aj napriek tomu, že B nemá rád A) a má rada všetky ostatné. Dokážte, že hostí možno usadiť k trom stolom takým spôsobom, aby mal každý hosť rád všetky osoby pri svojom stole.

Riešenie:

72-CPSJ-T3 (https://artofproblemsolving.com/community/c3822075_2023_czechpolishslovak_junior_match)

- D3** Pozdĺž kružnice je rozmiestnených 16 reálnych čísel so súčtom 7. Dokážte, že existuje úsek piatich susedných čísel so súčtom aspoň 2. Určte najmenšie k také, že v opísanej situácii možno vždy nájsť úsek k susedných čísel so súčtom aspoň 3.

Riešenie:

60-B-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=367#page=2>)

2

- N1** Dve tetivy delia kruh s obsahom 1 na štyri časti, pričom prvá tetiva delí kruh na dva odseky v pomere obsahov $1 : 2$ a druhá tetiva delí kruh na dva odseky v pomere obsahov $1 : 3$. Dokážte, že obsah niektorej zo 4 častí je o $\frac{5}{12}$ väčší ako obsah inej z častí.

Riešenie:

Označme x obsah prieniku dvoch odsekov s obsahmi $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$. Potom jednotlivé časti majú obsahy x , $\frac{1}{3} - x$, $\frac{1}{4} - x$ a $1 - \frac{1}{3} - (\frac{1}{4} - x) = \frac{5}{12} + x$, t. j. posledná časť je o $\frac{5}{12}$ väčšia ako prvá časť.

- N2** Dĺžky strán trojuholníka ABC tvoria aritmetickú postupnosť. Označme K, L, M body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami AB, BC, CA . Dokážte, že vzdialenosti $|AK|, |BL|, |CM|$ (v nejakom poradí) tiež tvoria aritmetickú postupnosť. Pomôcka: platí $|AK| = |AM|, |BK| = |BL|, |CL| = |CM|$.

Riešenie:

Označme $x = |AK| = |AM|, y = |BK| = |BL|, z = |CL| = |CM|$ a písmenami a, b, c dĺžky strán trojuholníka, pričom $a = b - d$ a $c = b + d$, kde d je diferenciacia aritmetickej postupnosti. Platí teda $x + y = c = b + d$, $y + z = a = b - d$, $z + x = b$. Sčítaním prvých dvoch rovníc a odčítaním tretej dostávame postupne $(x + y) + (y + z) - (x + z) = (b + d) + (b - d) - b$, t. j. $y = b/2$. Podobne sčítaním inej dvojice rovníc a odčítaním zvyšnej získame $z = b/2 - d$ a $x = b/2 + d$, teda z, y, x tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou d .

- N3** Dve tetivy delia kruh na štyri časti, pričom tri z týchto častí majú obsahy 5, 7 a 13. Určte obsah zvyšnej časti, ak jedna z tetív prechádza stredom kruhu. Určte všetky možnosti.

Riešenie:

11 a 15. Tetiva prechádzajúca stredom delí kruh na dva zhodné odseky, t. j. súčet obsahov dvoch častí je polovica obsahu kruhu. Obsah x štvrtej časti musí spĺňať jednu z troch rovníc: $5 + 13 = 7 + x$, $7 + 13 = 5 + x$ alebo $5 + 7 = 13 + x$. Z prvých dvoch rovníc dostávame riešenie 11, resp. 15, tretia rovnica nemá kladné riešenie. Rozmyslíme si, že k vypočítaným číslam naozaj existujú kruhy a tetivy. V prvom prípade má kruh obsah 36, v ňom vezmeme tetivu, ktorá ho rozdeľuje na odseky s obsahmi $7 + 5 = 12$ a $13 + 11 = 24$. Otáčaním tetivy prechádzajúcej stredom zabezpečíme, aby táto tetiva rozdelila odsek s obsahom 12 na dve časti s obsahmi 5 a 7. Zvyšné dve časti už majú nutne obsahy 13 a 11. Podobne v prípade druhého riešenia.

- D1** Každý hrane štvorstenu priradíme jedno reálne číslo tak, aby každá stena mala rovnaký súčet čísel svojich troch hrán. Nanajvýš koľko zo šiestich čísel priradených hranám môže byť navzájom rôznych?

Riešenie:

75-B-I-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=5838>)

- D2** Každý hrane štvorstenu priradíme kladné reálne číslo tak, aby niektoré dve steny mali rovnaký súčet čísel svojich troch hrán a zvyšné dve steny mali rovnaký súčin čísel svojich troch hrán. Nanajvýš koľko zo šiestich čísel priradených hranám môže byť rôznych?

Riešenie:

75-B-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=5877>)

- 3 Zopakujte si pojem rovnoláhlosti. Napr. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz12 alebo J. Šedivý: Shodnosť a podobnosť v konstrukčných úlohách, ŠMM, 1980 (<https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403977>).

- N1** Pre dané dve pretínajúce sa nezhodné kružnice zostrojte ich spoločné dotyčnice.

Riešenie:

Zvyčajná konštrukcia je založená na fakte, že spoločné dotyčnice sa pretínajú v tom strede rovnoláhlosti oboch kružníc, ktorý leží mimo kružníc. Tento stred zostrojíme takto: pre dané kružnice k, k' so stredmi S, S' zostrojíme rovnobežky p, p' prechádzajúce postupne bodmi S, S' , ktoré nie sú rovnobežné s priamkou SS' . Označme X prienik p a k a analogicky X' prienik p' a k' tak, aby $SS'X'X$ bol lichobežník. Priesečník priamky XX' s priamkou SS' je hľadaný stred rovnoláhlosti. Body dotyku dotyčníc s kružnicami potom zostrojíme pomocou Tálesových kružníc. (Opis konštrukcie je stručný, pretože ide o bežné stredoškolské učivo.)

- N2** Trojuholník ABC so stranami dĺžok $a = 7$, $b = 9$, $c = 12$ má obsah $S = 14\sqrt{5}$ (ako vyplýva z Herónovho vzorca). Vypočítajte a) výšku v_a na stranu a , b) polomer ρ vpísanej kružnice, c) polomer ρ_a kružnice pripísanej strane BC .

Riešenie:

a) $4\sqrt{5}$, b) $\sqrt{5}$, c) $2\sqrt{5}$. Zo známych vzorcov máme

$$v_a = \frac{2S}{a} = 4\sqrt{5} \quad \text{a} \quad \rho = \frac{2S}{a+b+c} = \sqrt{5}.$$

Z toho dostávame, že $2\rho = \frac{1}{2}v_a$. Preto je dotyčnica k vpísanej kružnici rovnobežná s BC (a rôzna od BC) strednou priečkou trojuholníka ABC . Keďže rovnoláhosť zobrazujúca vpísanú kružnicu na pripísanú kružnicu zobrazuje túto strednú priečku na stranu BC , je koeficient rovnoláhlosti rovný 2, t. j. $\rho_a = 2\rho = 2\sqrt{5}$.

- N3** Stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná s jeho stranou BC je dotyčnicou kružnice vpísanej trojuholníku ABC . Vyjadrite a pomocou b a c .

Riešenie:

$a = \frac{1}{3}(b+c)$. Zo zadania vyplýva $2\rho = \frac{1}{2}v_a$, čo spolu s $S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}\rho(a+b+c)$ dáva výsledok.

- N4** Priamka p je rovnobežná so stranou BC trojuholníka ABC a prechádza jeho ťažiskom. Označme K, L postupne priesečníky priamky p so stranami AB, AC trojuholníka. Aký je pomer polomerov kružníc k, l vpísaných postupne trojuholníkom ABC a AKL ?

Riešenie:

3 : 2. Trojuholník ABC je obrazom trojuholníka AKL v rovnoláhlosti so stredom A . V tejto rovnoláhlosti sa zobrazí ťažisko T na stred strany BC , preto je jej koeficient 3 : 2. Takisto je kružnica k obrazom kružnice l . Preto sú ich polomery v pomere 3 : 2.

- N5** V situácii z predchádzajúcej úlohy označme q rovnobežku s AC prechádzajúcu stredom kružnice k a Q priesečník priamok q a BC . Ďalej označme r rovnobežku s AC prechádzajúcu stredom kružnice l a R priesečník priamok r a KL . Dokážte, že priamka QR prechádza bodom A .

Riešenie:

Nech S_k a S_l postupne označujú stredy kružníc k a l . V rovnoláhlosti z predošlej úlohy je priamka q prechádzajúca bodom S_k obrazom priamky rovnobežnej s priamkou q prechádzajúcej bodom S_l , teda priamky r . Preto je aj priesečník priamok BC a q , t. j. bod Q , obrazom priesečníka ich vzorov, teda priamok KL a r , t. j. bodu R . Z vlastnosti rovnoláhlosti potom obraz Q , vzor R a stred rovnoláhlosti A ležia na priamke.

- D1** V trojuholníku ABC označme D bod dotyku vpísanej kružnice so stranou BC a E bod dotyku kružnice pripísanej strane BC s touto stranou. Dokážte, že stred úsečky DE splýva so stredom úsečky BC .

Riešenie:

Stačí dokázať, že $|BE| = |CD|$. Označme K, L postupne body dotyku pripísanej kružnice s polpriamkami AB, AC . Keďže $|AK| = |AL|$ a $|AK| = |AB| + |BK| = |AB| + |BE|$ a podobne $|AL| = |AC| + |CE|$, je $|AK| = |AL| = s$ polovica obvodu trojuholníka a $|BE| = |AK| - |AB|$. Rovnosť $|CD| = s - |AB|$ je známejšia a dokazuje sa podobne.

- D2** V situácii z predošlej úlohy nech je F taký bod kružnice vpísanej trojuholníku ABC , že FD je jej priemer. Dokážte, že body A, F a E ležia na jednej priamke.

Riešenie:

Kružnica pripísaná strane BC je obrazom vpísanej kružnice, pričom stred rovnoláhlosti sa nachádza v priesečníku spoločných dotyčníc, teda v bode A . V tejto rovnoláhlosti sa bod F zobrazí na bod E , preto body A, E, F ležia na priamke.

- D3** Daný je trojuholník ABC s obsahom S . Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC , je ľubovoľne zvolený bod O . Označme A', B', C' postupne obrazy bodov A, B, C v stredovej súmernosti podľa bodu O . Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

Riešenie:

60-A-II-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=362#page=2>)

- D4** Je daný trojuholník ABC . Označme T_a bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranou BC a E_a stred kružnice pripísanej strane BC . Podobne definujeme body T_b, E_b a T_c, E_c pre strany CA a AB . Dokážte, že priamky T_aE_a, T_bE_b a T_cE_c prechádzajú jedným bodom.

Riešenie:

PraSe 11/12, 1. série, úl. 3 (<https://prase.cz/archive/31/10.pdf>)

4

N1 Riešte v prirodzených číslach rovnicu $(a + b + 1)(a + 5b + 8) = 76$.

Riešenie:

$a = 1, b = 2$. Rozložme na prvočísla: $76 = 2 \cdot 2 \cdot 19$. Obe zátvorky sú prirodzené čísla väčšie ako 2, takže jediná možnosť rozkladu na súčin je $4 \cdot 19$. Druhá zátvorka je väčšia než prvá, preto $a + 5b + 8 = 19$, $a + b + 1 = 4$, odkiaľ ľahko dopočítame $a = 1, b = 2$.

N2 Riešte $(p + q)(p + r + 1) = 143$ pre prvočísla $p > q > r$.

Riešenie:

Nemá riešenie. $143 = 11 \cdot 13$. Keďže obe zátvorky sú väčšie ako 1 a ľavá je väčšia alebo rovná pravej, je nutne $p + q = 13$ a $p + r + 1 = 11$. Potom je ale jedno z prvočísel p, q párne, čo je spor s tým, že $p > q > r$ a r je prvočíslo.

N3 Určte všetky nenulové prirodzené čísla a s vlastnosťou: $3a + 14$ je násobkom čísla $a + 2$.

Riešenie:

2 a 6. Napíšme si $3a + 14 = 3(a + 2) + 8$. Evidentne $3(a + 2)$ je násobkom $a + 2$. Potom ale $3a + 14$ je násobkom $a + 2$ práve vtedy, keď je 8 násobkom $a + 2$. Preto $a + 2$ nadobúda jednu z hodnôt 1, 2, 4, 8.

D1 Nájdite všetky dvojice nenulových prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí $a + b + \text{nsd}(a, b) + \text{nsn}(a, b) = 50$.

Riešenie:

50-C-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2167#page=39>)

D2 Určte všetky dvojice a, b nenulových prirodzených čísel, pre ktoré platí $a \cdot \text{nsn}(a, b) = 4 \cdot \text{nsd}(a, b)$.

Riešenie:

62-C-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=687>)

D3 Nájdite všetky dvojice nenulových prirodzených čísel (a, b) takých, že $\text{nsn}(a, b) + \text{nsd}(a, b) = 63$.

Riešenie:

50-C-I-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2167#page=3>)

D4 Štyri navzájom rôzne prvočísla p, q, r, s spĺňajú rovnosť $72 + p = q \cdot r \cdot s$. Určte najmenšiu možnú hodnotu p .

Riešenie:

72-C-II-4 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4446#page=6>)

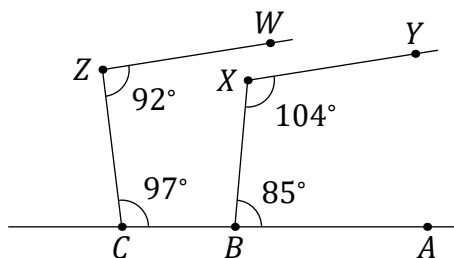
D5 Nájdite všetky nenulové prirodzené čísla, ktoré nie sú mocninou čísla 2 a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1.

Riešenie:

63-A-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=997>)

5

N1 Dokážte, že v situácii na obrázku platí $XY \parallel ZW$.



Riešenie:

Nech U je priesečník polpriamok WZ a AC . Dopočítaním uhlov v trojuholníku UCZ získame $|\angle ZUC| = 9^\circ$. Podobne $|\angle BVX| = 9^\circ$, pričom V je priesečník polpriamok AB a YX . Tieto dva uhly sú teda súhlasné, z čoho vyplýva rovnobežnosť priamok.

N2 Uvažujme trojuholník ABC s kružnicou k jemu opísanou a druhý trojuholník XYZ s opísanou kružnicou l . Nech platí $|\angle ABC| = |\angle XYZ|$. Potom sú kružnice k a l zhodné práve vtedy, keď $|AC| = |XZ|$.

Riešenie:

Ak sa rovnajú obvodové uhly, rovnajú sa aj stredové uhly, t. j. $|\angle AS_k C| = |\angle XS_l Z|$, kde S_k, S_l sú stredy oboch kružníc. Navyše sú oba trojuholníky $AS_k C, XS_l Z$ rovnoramenné, musia byť teda nutne podobné (uu). Ak sú rovnaké polomery oboch kružníc, tak sú zhodné ramená oboch trojuholníkov, takže trojuholníky sú zhodné.

a $|AC| = |XZ|$. Ak naopak $|AC| = |XZ|$, tak sú zhodné základne oboch trojuholníkov, teda sú trojuholníky zhodné, a preto sú rovnaké polomery oboch kružníc.

- N3** Nech ABC je trojuholník, k jemu opísaná kružnica a H priesečník jeho výšok. Označme H' obraz bodu H v osovej súmernosti podľa BC . Dokážte, že $H' \in k$.

Riešenie:

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a P_B, P_C päty výšok postupne z vrcholov B, C . Ak je ABC ostrouhlý alebo $\alpha > 90^\circ$, tak zo štvoruholníka AP_BHP_C vidíme, že $|\sphericalangle P_BHP_C| = 180^\circ - \alpha$, a teda aj $|\sphericalangle BH'C| = |\sphericalangle BHC| = |\sphericalangle P_BHP_C| = 180^\circ - \alpha$, t. j. $ABH'C$ je tetivový. Ak je pri vrchole B alebo C tupý uhol, vyjde $|\sphericalangle P_BHP_C| = \alpha$, čiže $|\sphericalangle BH'C| = \alpha$, t. j. $ABCH'$ resp. $ACBH'$ je tetivový.

- D1** Reimova veta hovorí: Nech body A, B, Y, X ležia na jednej kružnici. Na priamkach AX a BY sú postupne dané body C a D . Predpokladáme, že body A, B, Y, X, C, D sú navzájom rôzne. Potom body C, D, Y, X ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď priamky AB, CD sú rovnobežné. Dokážte ju pre prípad, že $ABDC$ je štvoruholník, X leží na úsečke AC a Y na úsečke BD .

Riešenie:

Z tetivového štvoruholníka $ABYX$ máme $|\sphericalangle XAB| = 180^\circ - |\sphericalangle BYX| = |\sphericalangle XYD|$ a tento uhol sa rovná $180^\circ - |\sphericalangle DCX|$ práve vtedy, keď je štvoruholník $XYDC$ tetivový. To dokazuje obe implikácie, pretože $AB \parallel CD$ práve vtedy, keď $|\sphericalangle XAB| = 180^\circ - |\sphericalangle DCX|$.

- D2** V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Na stranách AB a AE existujú postupne body P a Q tak, že $|AP| = |BC| = |QE|$ a $|AQ| = |BP| = |DE|$. Dokážte, že $CD \parallel PQ$.

Riešenie:

72-A-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4204>)

- D3** Konvexný päťuholník $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé. Uhlopriečky AD a EC sa pretínajú v bode S tak, že $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$. Dokážte, že päťuholník $ABCDE$ má niektoré dve strany rovnobežné.

Riešenie:

60-MEMO-T5 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=673#page=8>)

- 6** V nasledujúcich úlohách pod deliteľmi myslíme vždy kladné delitele.

- N1** Dokážte pokryť všetky delitele čísla 6 dvoma geometrickými postupnosťami? Dokážte pokryť všetky delitele čísla 24 dvoma geometrickými postupnosťami?

Riešenie:

Áno, áno. $(2^{n-1})_{n=1}^\infty$ a $(3 \cdot 2^{n-1})_{n=1}^\infty$ pokrývajú delitele čísla 6 a zároveň aj delitele čísla 24.

- N2** Nájdite nekonečne veľa čísel, ktorých všetky delitele možno pokryť dvoma geometrickými postupnosťami, ale jednou geometrickou postupnosťou nie.

Riešenie:

Napr. všetky čísla tvaru $3 \cdot 2^n$, $n \geq 1$.

- N3** Ak má číslo m prvočíselný rozklad $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, tak počet jeho deliteľov je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Dokážte.

Riešenie:

Každý deliteľ čísla m je deliteľný len prvočíslami p_i a prvočíslo p_i môže byť v prvočíselnom rozklade deliteľa zastúpené najviac v a_i -tej mocnine. Naopak všetky čísla tohto typu (ktorých počet je $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$) sú deliteľmi m a sú navzájom rôzne.

- N4** Dokážte, že v prvočíselnom rozklade čísla $n!$ je exponent dvojky väčší alebo rovný exponentu ľubovoľného iného prvočísla.

Riešenie:

Exponent pri prvočíse p v prvočíselnom rozklade čísla $n!$ získame tak, že vezmeme počet čísel deliteľných p v uzavretom intervale 1 až n , k nemu pripočítame počet čísel deliteľných p^2 v tomto intervale, ďalej pripočítame počet čísel deliteľných p^3, p^4 a tak ďalej (pre veľké mocniny už pripočítavame nuly). Uvažujme teraz ľubovoľné prvočíslo $p > 2$. Medzi číslami 1 až n je aspoň toľko párnych čísel ako čísel deliteľných p , aspoň toľko čísel deliteľných štyrmi ako tých deliteľných p^2 , aspoň toľko deliteľných ôsmimi ako tých deliteľných p^3 a tak ďalej. Sčítaním týchto počtov dostávame dokazovanú nerovnosť.

- N5** Obdĺžnik je rozdelený na 3×5 jednotkových štvorcíkov. Koľko najmenej potrebujeme priamok, aby každým vrcholom každého štvorca prechádzala aspoň jedna priamka?

Riešenie:

4. Vrcholy tvoria štvorcovú mriežku 4×6 , nech je to 4 na výšku a 6 na šírku. Ak vedieme priamky vodorovne,

stačia nám 4. Naopak ukážeme, že na každej priamke leží nanajvýš 6 vrcholov, teda potrebujeme aspoň 4. Každá priamka je buď zvislá, potom obsahuje 4 vrcholy (alebo žiadny), alebo nie je zvislá, potom pretne každú zvislú vrstvu nanajvýš v jednom vrchole, t. j. prechádza nanajvýš 6 vrcholmi mriežky.

- N6** Čísla a^4 a a^7 sú racionálne. Musí byť a tiež racionálne? Ak sú racionálne čísla b^4 a b^6 , musí byť racionálne aj b ?

Riešenie:

Áno, nie. Ak $a = 0$, je a racionálne. Ak $a \neq 0$, číslo $a^3 = a^7/a^4$ musí byť racionálne, a teda aj $a = a^4/a^3$. Naopak, ak je $b = \sqrt{2}$, tak b^4 aj b^6 sú racionálne, ale b nie.

- N7** Euklidov algoritmus je algoritmus na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch či viacerých čísel. Pre každú konečnú postupnosť $d_1, d_2, \dots, d_n$ nenulových prirodzených čísel opakujeme nasledujúci postup: v každom kroku vezmeme dva členy a, b postupnosti také, že $a > b$ (ak také existujú) a väčší člen a nahradíme ich rozdielom $a - b$. Dokážte, že algoritmus skončí po konečne veľa krokoch, a to vo chvíli, keď budú všetky čísla rovné najväčšiemu spoločnému deliteľovi pôvodných čísel $d_1, \dots, d_n$.

Riešenie:

Súčet všetkých čísel je nenulové prirodzené číslo. V každom kroku sa súčet zmenší a zároveň všetky čísla zostanú väčšie alebo rovné jednej, t. j. ich súčet bude vždy zdola ohraničený n . Tým je dokázané, že po konečnom počte krokov algoritmus skončí. Je zrejmé, že potom budú všetky čísla rovnaké (inak by sme mohli urobiť ďalší krok). Ukážeme, že čísla budú rovné najväčšiemu spoločnému deliteľovi d . Keďže sú na začiatku všetky čísla násobkami d a ak a, b sú násobky d , tak aj $a - b$ je násobok d , aj v ďalšom kroku, a teda aj kedykoľvek neskôr, budú všetky čísla deliteľné d . Predpokladajme teraz pre spor, že na konci sú všetky čísla rovné nejakému násobku $kd, k \neq 1$. Poďme teraz celým procesom späť k pôvodnej n -tici: v každom kroku vezmeme nejaké dve čísla $b, a - b$ a nahradíme ich číslami a, b , t. j. jedným z nich a ich súčtom. Keďže na konci boli všetky čísla násobky kd , museli nimi byť aj kedykoľvek v priebehu procesu, a teda aj na začiatku. To je ale spor s tým, že $\text{nsd}(d_1, \dots, d_n) = d$.

- D1** Pre celé číslo $n \geq 3$ definujeme postupnosť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ako postupnosť exponentov v prvočíselnom rozklade $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú prvočísla. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ geometrická postupnosť.

Riešenie:

66-MEMO-T8 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3907#page=25>)

- D2** Predpokladajme, že $a_1 < a_2 < \dots < a_{2024}$ je aritmetická postupnosť kladných celých čísel a postupnosť $b_1 < b_2 < \dots < b_{2024}$ je geometrická postupnosť kladných celých čísel. Určte najväčší možný počet celých čísel, ktoré sa môžu vyskytovať v oboch postupnostiach zároveň, a to cez všetky možné voľby týchto dvoch postupností.

Riešenie:

USA TST 2024 (<https://artofproblemsolving.com/community/c6h3234859p2964>)

- D3** Na tabuli je napísaných 2026 (nie nutne rôznych) celých čísel väčších ako 1. V každom ťahu Konfucius vyberie dve čísla $m > 1$ a $n > 1$ z rôznych miest na tabuli a nahradí ich číslami $\text{nsd}(m, n)$ a $\frac{\text{nsn}(m, n)}{\text{nsd}(m, n)}$. Tak pokračuje, kým môže. a) Dokážte, že nezávisle od postupu Konfucius po konečnom počte ťahov skončí, t. j. na tabuli zostane jediné číslo väčšie ako jedna. b) Dokážte, že hodnota tohto čísla je tiež nezávislá od Konfuciovho postupu.

Riešenie:

75-IMO-1 (https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2026_IMO_Problems/Problem_1)

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Peter Novotný
 - recenzent: Jozef Rajník