
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie B

1

- N1** Kvadratický trojčlen a) $g(x) = 2x^2 - x - 1$, b) $h(x) = 3x^2 + 8x - 3$ rozložte na súčin dvoch lineárnych dvojčlenov s celočíselnými koeficientmi.
- N2** Určte všetky lineárne dvojčleny $f(x) = ax + b$ s nenulovými reálnymi koeficientmi a, b , pre ktoré platí $f(a) = f(b) = 0$.
- N3** Určte všetky reálne čísla a , pre ktoré kubický trojčlen $f(x) = x^3 + (a + 1)x + 1$ spĺňa podmienku $f(a) = 0$.
- N4** Určte všetky (neúplné) kvadratické trojčleny $f(x) = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) s reálnymi koeficientmi, pre ktoré platí $f(a) = f(b) = 0$.
- D1** Určte všetky kvadratické trojčleny $f(x) = x^2 + bx + c$ s reálnymi koeficientmi b, c , pre ktoré platí $f(b) = f(c) = 0$.
- D2** Určte všetky dvojice (b, c) reálnych čísel, pre ktoré má kvadratická rovnica $x^2 + bx + c = 0$ korene b a c .
- D3** Rozložte $f(x) = x^4 + 1$ na súčin dvoch kvadratických trojčlenov s reálnymi koeficientmi.
- D4** Určte koeficienty p, q, r polynómu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, ak viete, že sú to nenulové navzájom rôzne celé čísla a že $f(p) = p^3, f(q) = q^3$.

2

- N1** Ktorú cifru má na mieste jednotiek a) súčet všetkých dvojčíferných nepárnych čísel, b) súčet všetkých dvojčíferných čísel, ktoré sú deliteľné tromi?
- N2** Možno prvočísla menšie ako 30 rozdeliť na tri skupiny tak, aby súčet čísel v každej skupine končil rovnakou cifrou?
- N3** Tabuľku 2×2 vyplníme štyrmi navzájom rôznymi nenulovými prirodzenými číslami tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci mal rovnakú cifru na mieste jednotiek. Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet všetkých čísel v tabuľke?
- D1** Tabuľku 3×3 máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky.
- D2** Nájdite všetky štvorcové tabuľky 3×3 prirodzených čísel, v ktorých je súčin všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovnaký, a pre ktoré platí, že súčet štyroch čísel v ich rohových políčkach je jednociferné číslo.
- D3** Daná je štvorcová tabuľka 3×3 nenulových prirodzených čísel, v ktorej je súčin všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovný číslu s . a) Dokážte, že číslo s je tretou mocninou prirodzeného čísla. b) Pokiaľ je jedno z rohových čísel tabuľky rovné 1, je súčet všetkých štyroch rohových čísel druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokážte.
- D4** Nájdite najväčšie celé číslo d , pre ktoré možno tabuľku 43×47 vyplniť jednotkami a dvojkami tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol deliteľný číslom d . (Dokážte tiež, že žiadne väčšie číslo d zadaniu úlohy nevyhovuje.)
- D5** Je možné vyplniť tabuľku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby súčet čísel v každom riadku bol deliteľný piatimi a súčet čísel v každom stĺpci bol deliteľný siedmimi?
- D6** Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci je deliteľný tromi. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke a dokážte, že väčší byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určeným najväčším súčtom.
- D7** Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný rovnakému číslu s . Určte najväčšiu možnú hodnotu s .
- D8** Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 10, -4 a 3 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je nanajvyš 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je nanajvyš 0. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke.

3

- N1** Nech K, L, M, N sú postupne stredy strán AB, BC, CD, DA štvoruholníka $ABCD$ (nie nutne konvexného). Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník (tzv. Varignonov rovnobežník prislúchajúci štvoruholníku $ABCD$).
- N2** Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Dokážte, že obsah jemu prislúchajúceho Varignonovho rovnobežníka $KLMN$ je rovný polovici obsahu štvoruholníka $ABCD$ a že jeho obvod je rovný súčtu dĺžok uhlopriečok AC a BD štvoruholníka $ABCD$.
- N3** Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$, v ktorom $AC \perp BD$. Dokážte, že jeho Varignonov rovnobežník $KLMN$ je pravouholník. (Ak sú navyše jeho uhlopriečky AC a BD zhodné, je štvoruholník $KLMN$ štvorec.)
- D1** Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ a jeho Varignonov rovnobežník $KLMN$. Nech P, Q sú postupne stredy uhlopriečok AC, BD . Dokážte, že priamky KM, LN a PQ prechádzajú spoločným bodom.
- D2** Do polkružnice s priemerom AB je vpísaný štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že stred spojnice stredov jeho uhlopriečok je rovnako vzdialený od bodu C ako od bodu D .
- D3** Nájdite všetky tetivové štvoruholníky $ABCD$ s obsahom 8 cm^2 , pre ktoré platí $|AB| = |BC|$ a súčet dĺžok uhlopriečok je 8 cm .

4

- N1** Nech m je prirodzené číslo. Určte všetky možné hodnoty $\text{nsd}(21, m)$.
- N2** Pre koľko prirodzených čísel m platí a) $\text{nsn}(19, m) = 75$; b) $\text{nsn}(19, m) = 76$; c) $\text{nsn}(76, m) = 2052$?
- N3** Určte všetky trojčiferné čísla, ktoré pri delení 19 a 20 dávajú postupne zvyšky a) 0 a 1; b) 1 a 2; c) 5 a 9.
- N4** Určte všetky trojčiferné čísla, ktoré po delení 19 dávajú zvyšok 5 a po delení 23 zvyšok 7.
- N5** Dokážte, že pre ľubovoľné nenulové prirodzené čísla a a b platí $a \cdot b = \text{nsn}(a, b) \cdot \text{nsd}(a, b)$.
- D1** Pre tri neznáme prirodzené čísla platí, že najväčší spoločný deliteľ prvého a druhého je 8, najväčší spoločný deliteľ druhého a tretieho je 2, najväčší spoločný deliteľ prvého a tretieho je 6, najmenší spoločný násobok všetkých troch čísel je 1680, najväčšie z čísel je väčšie ako 100, ale nie je väčšie ako 200, jedno z čísel je štvrtou mocninou celého čísla. O ktoré čísla ide? Určte všetky možnosti.
- D2** Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b , pre ktoré platí $2\text{nsn}(a, b) + 3\text{nsd}(a, b) = ab$.
- D3** Určte všetky dvojice a, b kladných celých čísel, pre ktoré platí $a \cdot \text{nsn}(a, b) = 4 \cdot \text{nsd}(a, b)$.
- D4** Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2 010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2 014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.
- D5** Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c , pre ktoré platí množinová rovnosť
- $$\{\text{nsd}(a, b), \text{nsd}(a, c), \text{nsd}(b, c), \text{nsn}(a, b), \text{nsn}(a, c), \text{nsn}(b, c)\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}.$$
- D6** Nech a, b, c sú kladné celé čísla také, že jedna z hodnôt $\text{nsd}(a, b) \cdot \text{nsn}(b, c)$, $\text{nsd}(b, c) \cdot \text{nsn}(c, a)$, $\text{nsd}(c, a) \cdot \text{nsn}(a, b)$ sa rovná súčinu zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré z čísel a, b, c je násobkom iného z nich.

5

- N1** Nájdite prvočíselný rozklad čísla 1001.
- N2** Dokážte, že každé šesťčiferné číslo, ktoré získame tak, že za sebou napíšeme dve rovnaké trojčiferné čísla, je deliteľné 1001.
- N3** Koľkými spôsobmi môžeme z čísel 1, 2, 3 zostaviť trojčiferné čísla, ktoré obsahujú každú z nich?
- N4** Koľkými spôsobmi môžeme z čísel 0, 1, 2, 3 zostaviť štvorčiferné čísla, ktoré obsahujú každú z nich?
- N5** Z čísel 3, 4, 5, 7 a 9 boli vytvorené všetky možné trojčiferné čísla tak, aby sa každá cifra vyskytovala v každom čísle nanajvýš raz. Určte počet takto vzniknutých čísel a ich celkový súčet.
- D1** Pat sčítal všetky štvorčiferné čísla, z ktorých každé obsahovalo všetky cifry 1, 2, 3 a 4, a dospel k súčtu 58 126. Mat mu potvrdil, že počítal správne, ale že zabudol pripočítať dve z uvažovaných čísel. Zistite, na ktoré čísla Pat zabudol.
- D2** Zapišeme všetky päťčiferné čísla, v ktorých sa každá z čísel 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje práve raz. Potom jedno (ľubovoľné z nich) škrtneme a všetky zvyšné sčítame. Aké sú možné hodnoty ciferného súčtu takého výsledku?
- D3** Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet takýchto vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $N : M$.

6

- N1** Dokážte vetu o obvodevom a stredovom uhle.
- N2** Dokážte vetu o zhodnosti obvodevého a úsekového uhla, t. j. vetu: *Je daný trojuholník ABC a bod K v polrovine*

opačnej k polrovine ABC . Potom priamka KA je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABC práve vtedy, keď platí $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle ACB|$.

- N3** Dve kružnice sa pretínajú v bodoch A a B ($A \neq B$). Bodom B prechádza priamka, ktorá pretína obe kružnice postupne v bodoch C a D ($C \neq B \neq D$). V bodoch C a D sú zostrojené dotyčnice k obom kružniciam, ktoré sa pretínajú v bode E . Dokážte, že body A , C , D a E ležia na jednej kružnici.
- D1** Dokážte, že os vnútorného uhla pri vrchole C trojuholníka ABC pretína kružnicu jemu opísanú v bode S ($S \neq C$), ktorý je stredom (kružnicového) oblúka AB neobsahujúceho vrchol C (tzv. *Švrčkov bod*).
- D2** Je daná kružnica k a jej tetiva PQ . Uvažujme kružnice ℓ , m , ktoré obe ležia v tej istej polrovine vytvorenej priamkou PQ tak, že každá z nich sa dotýka tak tetivy PQ , ako aj zvnútra kružnice k . Dokážte, že obe dvojice A , B a C , D dotykových bodov kružníc ℓ a m postupne s tetivou PQ a s kružnicou k ležia na jednej kružnici.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie B

1

- N1** Kvadratický trojčlen a) $g(x) = 2x^2 - x - 1$, b) $h(x) = 3x^2 + 8x - 3$ rozložte na súčin dvoch lineárnych dvojčlenov s celočíselnými koeficientmi.

Riešenie:

Podľa zadania $g(x) = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$. Porovnaním koeficientov dostaneme tri rovnice so štyrmi neznámymi, jednu neznámu tak môžeme zvoliť a zvyšné dopočítať. Dostaneme $g(x) = (2x + 1)(x - 1)$, $h(x) = (3x - 1)(x + 3)$.

- N2** Určte všetky lineárne dvojčleny $f(x) = ax + b$ s nenulovými reálnymi koeficientmi a, b , pre ktoré platí $f(a) = f(b) = 0$.

Riešenie:

$f(x) = -x - 1$. Dosadením dostaneme sústavu dvoch rovníc $0 = f(a) = a^2 + b$, $0 = f(b) = b(a + 1)$. Vďaka $b \neq 0$ z druhej rovnice získame $a = -1$, čo po dosadení do prvej rovnice dá $b = -1$. Skúškou ľahko overíme, že $f(x) = -x - 1$ vyhovuje.

- N3** Určte všetky reálne čísla a , pre ktoré kubický trojčlen $f(x) = x^3 + (a + 1)x + 1$ spĺňa podmienku $f(a) = 0$.

Riešenie:

$a = -1$. Dosadením dostaneme rovnicu $0 = f(a) = a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + 1)$ s jediným reálnym koreňom $a = -1$, čo vyhovuje.

- N4** Určte všetky (neúplné) kvadratické trojčleny $f(x) = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) s reálnymi koeficientmi, pre ktoré platí $f(a) = f(b) = 0$.

Riešenie:

$f(x) = -x^2 - x$. Dosadením získame sústavu rovníc $0 = a(a^2 + b)$, $0 = b^2(a + 1)$. Použitím druhej rovnice dostaneme $a = -1$ alebo $b = 0$ a dosadíme do prvej rovnice. Iné riešenie: najskôr uvažíme $a = b$, čo vedie k vyššie uvedenému riešeniu, v prípade $a \neq b$ použitím Viètových vzťahov dostaneme sústavu $a + b = -b/a$, $ab = 0$ bez vyhovujúceho riešenia.

- D1** Určte všetky kvadratické trojčleny $f(x) = x^2 + bx + c$ s reálnymi koeficientmi b, c , pre ktoré platí $f(b) = f(c) = 0$.

Riešenie:

Úloha má 3 riešenia: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + x - 2$ a $f_3(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe buď $b = c$, odkiaľ po dosadení získame tretie riešenie, alebo z Viètových vzťahov $b + c = -b$, $bc = c$.

- D2** Určte všetky dvojice (b, c) reálnych čísel, pre ktoré má kvadratická rovnica $x^2 + bx + c = 0$ korene b a c .

Riešenie:

Použitím Viètových vzťahov medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice zistíme, že úloha má práve 2 riešenia, a to $(b, c) \in \{(0, 0), (1, -2)\}$.

- D3** Rozložte $f(x) = x^4 + 1$ na súčin dvoch kvadratických trojčlenov s reálnymi koeficientmi.

Riešenie:

Podobne ako v N1 dostaneme $f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$. Iné riešenie: $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$.

- D4** Určte koeficienty p, q, r polynómu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, ak viete, že sú to nenulové navzájom rôzne celé čísla a že $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$.

Riešenie:

57-A-III-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=215>)

2

- N1** Ktorú cifru má na mieste jednotiek a) súčet všetkých dvojciferných nepárnych čísel, b) súčet všetkých dvojciferných čísel, ktoré sú deliteľné tromi?

Riešenie:

Cifra na mieste jednotiek súčtu závisí len od cifier na mieste jednotiek jednotlivých sčítancov. a) V každej desiatke končia nepárne čísla ciframi 1, 3, 5, 7, 9, ich súčet 25 končí cifrou 5, týchto desiatok je 9, preto posledná cifra súčtu bude rovnaká ako pri čísle $5 \cdot 9 = 45$, teda 5. (Daný súčet je 2475.) b) V každej desiatke sú práve tri čísla končiace nenulovou cifrou, ktoré sú deliteľné tromi. V deviatich desiatkach sa každá kombinácia troch zodpovedajúcich posledných cifier zopakuje práve trikrát, preto súčet všetkých daných čísel končí rovnakou cifrou ako $3 \cdot 5 = 15$, teda 5. (Daný súčet je 1665.)

- N2** Možno prvočísla menšie ako 30 rozdeliť na tri skupiny tak, aby súčet čísel v každej skupine končil rovnakou cifrou?

Riešenie:

Týchto prvočísel je 10, sú to 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Ich súčet (129) končí cifrou 9. Ak súčet čísel v každej skupine končí cifrou k , tak súčet všetkých desiatich čísel má na mieste jednotiek rovnakú cifru ako číslo $3k$, teda 9. Taká cifra k je jediná, je to cifra 3. Existuje viac vyhovujúcich rozdelení, jedno z nich je $\{2, 3, 5, 13\}$, $\{11, 19, 23\}$ a $\{7, 17, 29\}$.

- N3** Tabuľku 2×2 vyplníme štyrmi navzájom rôznymi nenulovými prirodzenými číslami tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci mal rovnakú cifru na mieste jednotiek. Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet všetkých čísel v tabuľke?

Riešenie:

Ľahko si rozmyslíme, že čísla v pravom hornom rohu tabuľky a jej ľavom dolnom rohu končia rovnakou cifrou rovnako ako čísla v pravom dolnom a ľavom hornom rohu. Dvojica s najmenším súčtom je 1, 11 a dvojica s druhým najmenším súčtom je 2 a 12 (ak má byť súčet menší ako 30, musia byť na mieste desiatok 0 a 1, a na mieste jednotiek chceme mať čo najmenšie cifry, ale 0 tam byť nemôže). Tabuľka so súčtom $1 + 2 + 11 + 12 = 26$ sa nachádza nižšie.

1	12	13
2	11	13
3	23	26

- D1** Tabuľku 3×3 máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky.

Riešenie:

69-C-I-5 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3388#page=6>)

- D2** Nájdite všetky štvorcové tabuľky 3×3 prirodzených čísel, v ktorých je súčin všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovnaký, a pre ktoré platí, že súčet štyroch čísel v ich rohových políčkach je jednociferné číslo.

Riešenie:

47-B-S-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2170#page=49>)

- D3** Daná je štvorcová tabuľka 3×3 nenulových prirodzených čísel, v ktorej je súčin všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovný číslu s . a) Dokážte, že číslo s je tretou mocninou prirodzeného čísla. b) Pokiaľ je jedno z rohových čísel tabuľky rovné 1, je súčet všetkých štyroch rohových čísel druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokážte.

Riešenie:

47-B-II-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2170#page=51>)

- D4** Nájdite najväčšie celé číslo d , pre ktoré možno tabuľku 43×47 vyplniť jednotkami a dvojkami tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol deliteľný číslom d . (Dokážte tiež, že žiadne väčšie číslo d zadaniu úlohy nevyhovuje.)

Riešenie:

71-A-S-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3918>)

- D5** Je možné vyplniť tabuľku 8×8 šestkami a sedmičkami tak, aby súčet čísel v každom riadku bol deliteľný piatimi a súčet čísel v každom stĺpci bol deliteľný siedmimi?

Riešenie:

71-A-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3921>)

- D6** Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci je deliteľný tromi. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke a dokážte, že väčší byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určeným

najväčším súčtom.

Riešenie:

71-C-S-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3929>)

- D7** Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný rovnakému číslu s . Určte najväčšiu možnú hodnotu s .

Riešenie:

71-C-II-4 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4055#page=4>)

- D8** Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 10, -4 a 3 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je najvyššie 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je najvyššie 0. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke.

Riešenie:

71-B-II-4 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4057#page=5>)

3

- N1** Nech K, L, M, N sú postupne stredy strán AB, BC, CD, DA štvoruholníka $ABCD$ (nie nutne konvexného). Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník (tzv. Varignonov rovnobežník prislúchajúci štvoruholníku $ABCD$).

Riešenie:

Úsečky KL a MN ako stredné priečky trojuholníkov ABC a ACD sú rovnobežné so stranou AC (teda aj navzájom) a majú rovnakú dĺžku $\frac{1}{2}|AC|$. Analogicky pre úsečky LM a NK .

- N2** Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Dokážte, že obsah jemu prislúchajúceho Varignonovho rovnobežníka $KLMN$ je rovný polovici obsahu štvoruholníka $ABCD$ a že jeho obvod je rovný súčtu dĺžok uhlopriečok AC a BD štvoruholníka $ABCD$.

Riešenie:

Obsah trojuholníka KBL je štvrtinou obsahu trojuholníka ABC , keďže tieto trojuholníky sú podobné s koeficientom $\frac{1}{2}$. Podobne obsah trojuholníka MDN je štvrtinou obsahu trojuholníka ACD . Súčet obsahov trojuholníkov KBL a MDN je tak štvrtinou obsahu štvoruholníka $ABCD$. Podobne je súčet obsahov trojuholníkov NAK a LCM tiež štvrtinou obsahu štvoruholníka $ABCD$. Keďže tieto štyri trojuholníky dopĺňujú rovnobežník $KLMN$ do štvoruholníka $ABCD$, je obsah Varignonovho rovnobežníka $KLMN$ polovicou obsahu štvoruholníka $ABCD$. Z riešenia úlohy N1 vyplýva $|KL| + |MN| = \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|AC| = |AC|$. Podobnou úvahou dostaneme $|LM| + |KN| = |BD|$ a teda obvod Varignonovho rovnobežníka $KLMN$ je súčtom dĺžok uhlopriečok AC a BD .

- N3** Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$, v ktorom $AC \perp BD$. Dokážte, že jeho Varignonov rovnobežník $KLMN$ je pravouholník. (Ak sú navyše jeho uhlopriečky AC a BD zhodné, je štvoruholník $KLMN$ štvorec.)

Riešenie:

Podobnými úvahami ako v N1 sú strany KL a MN resp. LM a KN rovnobežné s kolmými uhlopriečkami AC resp. BD , teda sú navzájom kolmé.

- D1** Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ a jeho Varignonov rovnobežník $KLMN$. Nech P, Q sú postupne stredy uhlopriečok AC, BD . Dokážte, že priamky KM, LN a PQ prechádzajú spoločným bodom.

Riešenie:

Priesečník U uhlopriečok rovnobežníka $KLMN$ delí obe tieto uhlopriečky na polovicu. Úsečky KQ a MP sú ako stredné priečky trojuholníkov ABD a ACD rovnobežné s ich spoločnou stranou AD a majú polovičnú dĺžku, $KQMP$ je tak rovnobežník a jeho uhlopriečky KM a PQ sa navzájom delia na polovicu, špeciálne bod U ako priesečník uhlopriečok KM a LN je stredom úsečky PQ .

- D2** Do polkružnice s priemerom AB je vpísaný štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že stred spojnice stredov jeho uhlopriečok je rovnako vzdialený od bodu C ako od bodu D .

Riešenie:

75-B-II-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=5877#page=3>)

- D3** Nájdite všetky tetivové štvoruholníky $ABCD$ s obsahom 8 cm^2 , pre ktoré platí $|AB| = |BC|$ a súčet dĺžok uhlopriečok je 8 cm .

Riešenie:

34-B-I-5 (https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/404799/MatematikaOlympiada_034-1987-1_9.pdf#page=7)

4

- N1** Nech m je prirodzené číslo. Určte všetky možné hodnoty $\text{nsd}(21, m)$.

Riešenie:

Najväčší spoločný deliteľ dvoch čísel je deliteľom každého z nich. Preto je deliteľom aj čísla 21, ktoré má deliteľov 1, 3, 7, 21. Tieto hodnoty nadobudne $\text{nsd}(21, m)$ napríklad pre čísla m postupne rovné 1, 9, 49, 21.

- N2** Pre koľko prirodzených čísel m platí a) $\text{nsn}(19, m) = 75$; b) $\text{nsn}(19, m) = 76$; c) $\text{nsn}(76, m) = 2052$?

Riešenie:

a) 0, b) 2, c) 6. Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je násobkom každého z nich. Keďže 75 nie je násobkom 19, tak odpoveď a) je 0. V prípade b) platí $76 = 2^2 \cdot 19$. Číslo m je tak deliteľom čísla 76. Vzhľadom na to, že $\text{nsd}(19, 2^2) = 1$, je násobkom $2^2 = 4$. Také delitele čísla 76 existujú len dva, a to 4 a 76. c) Podobne ako v prípade b) je m deliteľom čísla $2052 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19$, ktorý je násobkom 3^3 , takých čísel existuje 6, sú to čísla $2^0 \cdot 3^3 \cdot 19^0 = 27$, $2^1 \cdot 3^3 \cdot 19^0 = 54$, $2^2 \cdot 3^3 \cdot 19^0 = 108$, $2^0 \cdot 3^3 \cdot 19^1 = 513$, $2^1 \cdot 3^3 \cdot 19^1 = 1026$ a $2^2 \cdot 3^3 \cdot 19^1 = 2052$.

- N3** Určte všetky trojčiferné čísla, ktoré pri delení 19 a 20 dávajú postupne zvyšky a) 0 a 1; b) 1 a 2; c) 5 a 9.

Riešenie:

a) Hľadané trojčiferné číslo m je násobkom 19, platí tak $m = 19k$, kde k je prirodzené číslo. Súčasne $m - 1$ je násobkom 20, teda číslo $19k - 1 = 20k - (k + 1)$ je násobkom 20. Číslo $k + 1$ tak musí byť násobkom 20, teda $k \in \{19, 39, 59, \dots\}$. Keďže $59 \cdot 19 = 1121$, čo je číslo štvorciferné, prichádzajú do úvahy len čísla $k \in \{19, 39\}$. Týmto dvom k zodpovedajú trojčiferné čísla m postupne 361, 741. b) Prirodzené číslo m má vlastnosť a) práve vtedy, keď číslo $m + 1$ má vlastnosť b), hľadané čísla tak sú 362 a 742. c) Podobne ako v a) zistíme, že vyhovujú len čísla 309 a 689.

- N4** Určte všetky trojčiferné čísla, ktoré po delení 19 dávajú zvyšok 5 a po delení 23 zvyšok 7.

Riešenie:

214 a 651.

- N5** Dokážte, že pre ľubovoľné nenulové prirodzené čísla a a b platí $a \cdot b = \text{nsn}(a, b) \cdot \text{nsd}(a, b)$.

Riešenie:

Inak zapíšeme prvočíselné rozklady čísel a, b v tvare $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \dots$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \dots$, kde α_i a β_i sú nezáporné celé čísla a použijeme zrejmú identitu $\alpha_i + \beta_i = \max(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \beta_i)$.

- D1** Pre tri neznáme prirodzené čísla platí, že najväčší spoločný deliteľ prvého a druhého je 8, najväčší spoločný deliteľ druhého a tretieho je 2, najväčší spoločný deliteľ prvého a tretieho je 6, najmenší spoločný násobok všetkých troch čísel je 1680, najväčšie z čísel je väčšie ako 100, ale nie je väčšie ako 200, jedno z čísel je štvrtou mocninou celého čísla. O ktoré čísla ide? Určte všetky možnosti.

Riešenie:

70-Z9-III-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3574>)

- D2** Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b , pre ktoré platí $2\text{nsn}(a, b) + 3\text{nsd}(a, b) = ab$.

Riešenie:

69-C-I-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3388#page=3>)

- D3** Určte všetky dvojice a, b kladných celých čísel, pre ktoré platí $a \cdot \text{nsn}(a, b) = 4 \cdot \text{nsd}(a, b)$.

Riešenie:

62-C-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=687>)

- D4** Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2 010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2 014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

Riešenie:

64-C-I-5 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=1338#page=5>)

- D5** Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c , pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{\text{nsd}(a, b), \text{nsd}(a, c), \text{nsd}(b, c), \text{nsn}(a, b), \text{nsn}(a, c), \text{nsn}(b, c)\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}.$$

Riešenie:

61-C-I-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=453#page=3>)

- D6** Nech a, b, c sú kladné celé čísla také, že jedna z hodnôt $\text{nsd}(a, b) \cdot \text{nsn}(b, c)$, $\text{nsd}(b, c) \cdot \text{nsn}(c, a)$, $\text{nsd}(c, a) \cdot \text{nsn}(a, b)$ sa rovná súčinu zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré z čísel a, b, c je násobkom iného z nich.

Riešenie:

73-A-III-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4923>)

- N1** Nájdite prvočíselný rozklad čísla 1001.

Riešenie:

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

- N2** Dokážte, že každé šesťciferné číslo, ktoré získame tak, že za sebou napíšeme dve rovnaké trojčiferné čísla, je deliteľné 1001.

Riešenie:

Číslo má tvar $\overline{abc\ abc} = \overline{abc} \cdot 1001$.

- N3** Koľkými spôsobmi môžeme z cifier 1, 2, 3 zostaviť trojčiferné čísla, ktoré obsahujú každú z nich?

Riešenie:

Prvú cifru môžeme vybrať 3 spôsobmi, zostávajú dve cifry. Z nich druhú cifru môžeme vybrať 2 spôsobmi a poslednú jedným. Takže takto možno zostaviť $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ rôznych čísel. (Súčin $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ označujeme $n!$ a čítame n faktoriál, napr. $5!$ čítame päť faktoriál.)

- N4** Koľkými spôsobmi môžeme z cifier 0, 1, 2, 3 zostaviť štvorčiferné čísla, ktoré obsahujú každú z nich?

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe. Prvá cifra takého čísla musí byť nenulová, tú môžeme vybrať 3 spôsobmi, druhá už môže byť ľubovoľná, môžeme ju vybrať 3 spôsobmi atď. Vidíme, že tak možno zostaviť $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3! = 18$ rôznych čísel. Alternatívne: štyri cifry môžeme usporiadať $4! = 24$ spôsobmi, avšak $3! = 6$ týchto poradí začína cifrou 0, čo nedáva štvorčiferné čísla. Preto takto môžeme zostaviť $24 - 6 = 18$ čísel.

- N5** Z cifier 3, 4, 5, 7 a 9 boli vytvorené všetky možné trojčiferné čísla tak, aby sa každá cifra vyskytovala v každom čísle najvyššie raz. Určte počet takto vzniknutých čísel a ich celkový súčet.

Riešenie:

68-Z9-II-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3052#page=3>)

- D1** Pat sčítal všetky štvorčiferné čísla, z ktorých každé obsahovalo všetky cifry 1, 2, 3 a 4, a dospel k súčtu 58 126. Mat mu potvrdil, že počítal správne, ale že zabudol pripočítať dve z uvažovaných čísel. Zistite, na ktoré čísla Pat zabudol.

Riešenie:

66-Z9-II-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2208#page=3>)

- D2** Zapišeme všetky päťciferné čísla, v ktorých sa každá z cifier 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje práve raz. Potom jedno (ľubovoľné z nich) škrtneme a všetky zvyšné sčítame. Aké sú možné hodnoty ciferného súčtu takého výsledku?

Riešenie:

60-B-II-4 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=388#page=2>)

- D3** Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet takýchto vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $N : M$.

Riešenie:

72-B-I-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4362>)

6

- N1** Dokážte vetu o obvodovom a stredovom uhle.

Riešenie:

Pozri str. 3–4 brožúry Kružnice (<https://www.dml.cz/dmlcz/403592>) zo Školy mladých matematiků alebo tiež komentovaný výklad na <https://www.youtube.com/watch?v=REi-iU55oog>.

- N2** Dokážte vetu o zhodnosti obvodového a úsekového uhla, t. j. vetu: *Je daný trojuholník ABC a bod K v polrovine opačnej k polrovine ABC . Potom priamka KA je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABC práve vtedy, keď platí $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle ACB|$.*

Riešenie:

Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC . V prípade, že uhol ACB je ostrý, leží bod O v polrovine ABC a $|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB|$. Keďže AOB je rovnoramenný trojuholník so základňou AB , je táto rovnosť ekvivalentná s $|\sphericalangle BAO| = 90^\circ - |\sphericalangle ACB|$. Priamka AK je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku ABC práve vtedy, keď $OA \perp AK$, teda práve vtedy, keď $|\sphericalangle KAB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAO| = 90^\circ - (90^\circ - |\sphericalangle ACB|) = |\sphericalangle ACB|$. V prípade, že uhol ACB je pravý, vyplýva tvrdenie priamo z Tálesovej vety. Ak je uhol ACB tupý, leží bod O v polrovine opačnej k ABC a $|\sphericalangle BOA| = 360^\circ - 2|\sphericalangle ACB|$. Keďže AOB je rovnoramenný trojuholník so základňou AB , je táto rovnosť ekvivalentná s $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle ACB| - 90^\circ$. Priamka AK je dotyčnicou ku kružnici

opísanej trojuholníku ABC práve vtedy, keď $OA \perp AK$, teda práve vtedy, keď $|\sphericalangle KAB| = 90^\circ + |\sphericalangle OAB| = 90^\circ + (|\sphericalangle ACB| - 90^\circ) = |\sphericalangle ACB|$.

- N3** Dve kružnice sa pretínajú v bodoch A a B ($A \neq B$). Bodom B prechádza priamka, ktorá pretína obe kružnice postupne v bodoch C a D ($C \neq B \neq D$). V bodoch C a D sú zostrojené dotyčnice k obom kružniciam, ktoré sa pretínajú v bode E . Dokážte, že body A , C , D a E ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

Riešenie úlohy nájdete v článku *J. Švrčka a L. Juklovej Ako dokázať, že štyri body ležia na kružnici* (https://mfi.upol.cz/files/35/3503/mfi_3503_03_svrcek_juklova_179_187.pdf), ktorý vyšiel v čísle 3 aktuálneho 35. ročníka časopisu Matematika-fyzika-informatika (<https://mfi.upol.cz/>).

- D1** Dokážte, že os vnútorného uhla pri vrchole C trojuholníka ABC pretína kružnicu jemu opísanú v bode S ($S \neq C$), ktorý je stredom (kružnicového) oblúka AB neobsahujúceho vrchol C (tzv. *Švrčkov bod*).

Riešenie:

Nech O je stredom kružnice trojuholníku opísanej. Podľa vety o stredovom uhle sa (rovnoramenné) trojuholníky ASO a BSO zhodujú v dĺžkach ramien AO , SO a BO a v uhloch nimi zovretých, sú tak podľa vety *sus* zhodné, teda bod S leží na osi strany AB , ktorá pretína oblúk AB v jeho strede.

- D2** Je daná kružnica k a jej tetiva PQ . Uvažujme kružnice ℓ , m , ktoré obe ležia v tej istej polrovine vytvorenej priamkou PQ tak, že každá z nich sa dotýka tak tetivy PQ , ako aj zvnútra kružnice k . Dokážte, že obe dvojice A , B a C , D dotykových bodov kružníc ℓ a m postupne s tetivou PQ a s kružnicou k ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

Riešenie úlohy nájdete v článku *J. Švrčka a L. Juklovej Ako dokázať, že štyri body ležia na kružnici* (https://mfi.upol.cz/files/35/3503/mfi_3503_03_svrcek_juklova_179_187.pdf), ktorý vyšiel v čísle 3 aktuálneho 35. ročníka časopisu Matematika-fyzika-informatika (<https://mfi.upol.cz/>).

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Peter Novotný
 - recenzent: Jozef Rajník