

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie C

1

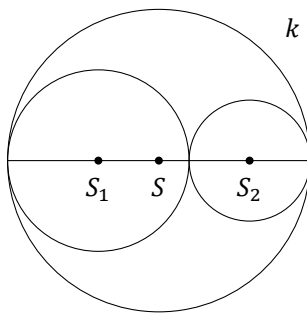
- N1** Máme 7 zlatých a 3 strieborné mince. Ako ich máme usporiadať do radu tak, aby v aspoň jednej skupine piatich susedných mincí bolo viac strieborných ako zlatých mincí?
- N2** Vo vrecúšku je 10 guľôčok, každá je buď modrá, alebo červená. Ak z vrecúška vytiahneme 5 guľôčok, vždy sú aspoň tri z nich modré. Koľko môže byť vo vrecúšku modrých guľôčok?
- N3** Máme 10 mincí, z ktorých každá je buď zlatá, alebo strieborná. Mince sú usporiadané v rade tak, že dve strieborné mince nie sú vedľa seba. Koľko zlatých mincí môžeme mať? Určte všetky možnosti.
- N4** Máme 20 mincí, z ktorých každá je buď zlatá, alebo strieborná. Mince sú usporiadané v obdĺžniku tvorenom dvomi radmi po 10 mincí tak, že dve strieborné mince nie sú vedľa seba ani v riadku, ani v stĺpci. Koľko zlatých mincí môžeme mať? Určte všetky možnosti.
- D1** Vyriešte zadanú úlohu pre 19 mincí (podmienka skupiny 7 susedných mincí ostáva bez zmeny).

Ako sme mohli v predošlých úlohách vidieť, kľúčovým bolo určiť najmenší možný počet zlatých mincí. Všetky vyššie počty sa dali ľahko dosiahnuť zamenou strieborných mincí za zlaté. Preto sa v ďalších doplňujúcich úlohách bližšie pozrieme na úlohy na hľadanie najmenšieho (príp. najväčšieho) možného počtu. Často náročnejšou časťou týchto úloh je zdôvodniť, prečo sa menší (príp. väčší) počet nedá dosiahnuť. Častým spôsobom argumentácie je rozdeliť si situáciu na niekoľko menších častí a sčítat odhady pre ne – ako sme v úlohe N3 sčítali odhady pre páry a v úlohe N4 pre prvý a druhý riadok.

- D2** Pavol rieši nasledovnú úlohu: „Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \dots, 20$. Koľko najviac čísel z tabule vieme zakrúžkovať tak, aby neexistovali dve zakrúžkované čísla, z ktorých jedno delí druhé?“ Jeho riešenie znie nasledovne: „Keďže chceme zakrúžkovať čo najviac čísel, tak zakrúžkujeme prvočísla, lebo tie majú najmenej deliteľov a navzájom sa nedelia. Zakrúžkujeme teda 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Teda najviac možno zakrúžkovať 8 čísel.“ Je Pavlovo riešenie úplné a správne (vrátane odôvodnenia)?
- D3** Vyriešte Pavlovu úlohu.

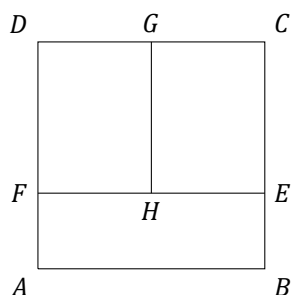
2

- N1** Do kružnice k s polomerom 2 sú vpísané dve menšie kružnice, ktoré sa navzájom dotýkajú, súčasne sa zvnútra dotýkajú kružnice k a stredy všetkých troch kružníc ležia na jednej priamke.



Ukážte, že obvod kružnice k sa rovná súčtu obvodov dvoch menších kružníc.

- N2** Štvorec $ABCD$, kde $|AB| = 20$, sme rozdelili úsečkami EF , pričom $EF \parallel AB$, a GH , pričom $GH \parallel BC$ a $G \in CD$, na 3 obdĺžniky podobne ako na obrázku. Každý z obdĺžnikov $ABEF$, $CEHG$, $DFHG$ má rovnaký obvod. Určte tento obvod.



- D1** Štvorec $ABCD$ zložený z $n \times n$ jednotkových štvorčekov (kde $n \in \mathbb{N}^+$) sme rozdelili na tri obdĺžniky tak, že všetky majú rovnaký obsah a každý sa dotýka zvyšných dvoch (podobne ako v predošlej návodnej úlohe). Strihy sú vedené po stranách jednotkových štvorčekov. Určte najmenšiu hodnotu n , pre ktorú je také rozdelenie možné.
- D2** List papiera v tvare obdĺžnika $ABCD$, $|AB| > |BC|$, preložíme tak, že vrchol A splynie s bodom C . Zdôvodnite, prečo je obvod výsledného päťuholníka menší ako obvod obdĺžnika $ABCD$.

3

- N1** Nájdite všetky celé čísla $n \geq 2$, ktoré sú o 76 väčšie ako ich najmenší prvočiniteľ.
- N2** Nájdite všetky prvočísla p, q také, že $p \neq q$ a číslo pq je o 76 menšie ako súčet všetkých jeho kladných deliteľov.
- D1** Číslo n je o 5 väčšie ako trojnásobok jeho najväčšieho nepárneho deliteľa. Určte číslo n .
- D2** Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n .
- D3** Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú práve 6 deliteľov, pričom súčet druhého najväčšieho a druhého najmenšieho z nich je 54.

4

- N1** Ukážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$(a + b)^2 \geq (a - b)^2,$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

- N2** Pre reálne čísla a, b, c platí

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2, \quad a > b > c.$$

Koľko najviac z čísel a, b, c môže byť záporných?

- N3** Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y platí nerovnosť

$$|x + y| \geq |x| - |y|.$$

- D1** Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

- D2** Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokážte, že potom platí aj $c^2 + ab \leq ac + bc$.

- D3** Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b, c > d$ platí

$$a + b > c + d, \quad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$.

5

- N1** Prečo ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom?
- N2** Pripomeňme si, ako sa počíta obsah lichobežníka a prečo tomu tak je.
- N3** Medzi dvoma rovnobežkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdialenosť od priamky p je dvakrát väčšia ako jeho vzdialenosť od priamky q . Uvažujme body K a L ležiace postupne na priamkach p a q také, že bod M leží na úsečke KL . Dokážte, že bod M rozdeľuje úsečku KL v pomere 2 : 1.

- N4** Medzi dvoma rovnobežkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdialenosť od priamky p je rovnaká ako jeho vzdialenosť od priamky q . Uvažujme body A, B ležiace na priamke p a body C a D ležiace na priamke q tak, že bod M je priesečníkom úsečiek AD a BC a polpriamky AB a CD sú súhlasné. Dokážte, že trojuholníky ABM a DCM sú zhodné.
- N5** V trojuholníku ABC označme stredy jeho strán AB, BC a AC postupne K, L a M . Priesečník úsečiek AL a BM označme O . Koľkokrát je obsah trojuholníka ABC väčší ako obsah trojuholníka AKO ?
- D1** Nech P a Q sú postupne stredy strán BC a AC trojuholníka ABC . Nech rovnobežka s AC prechádzajúca stredom K úsečky PQ pretína priamku BQ v bode L a priamka PL pretína úsečku AC v bode M . Dokážte, že M je stred úsečky AQ .
- D2** Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD . Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC . Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$.
- D3** Daný je obdĺžnik $ABCD$, pričom $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA sú dané postupne body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdĺžnik a platí $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočítajte pomer obsahov obdĺžnikov $ABCD$ a $KLMN$.

6

- N1** Vo vrecúšku sú štyri guľôčky – biela, červená, modrá a zelená. V každom ťahu vytiahneme naraz 3 rôzne guľôčky, pozrieme si ich a vrátime do vrecúška. Koľkokrát musíme zopakovať ťahy, aby sme si boli istí, že vytiahneme rovnakú trojicu guľôčok?
- N2** Kuchár varí tri jedlá. Na každý z dvoch dní zostaví jedálny lístok obsahujúci nie nutne rovnaký počet jedál. Musí zaručiť, aby si ľubovoľné dve rôzne jedlá z týchto troch bolo možné počas týchto dvoch dní v nejakom poradí objednať (každý deň jedno jedlo). Dokážte, že každý deň musel jedálny lístok obsahovať aspoň 2 jedlá, a nájdite taký príklad jedálnych lístkov na oba dni s práve dvoma jedlami.
- N3** Kuchár varí 9 jedál (označených číslami 1, 2, ..., 9) a zostavil takýto jedálny lístok:

Pon	1	3	6	8
Ut	1	4	6	9
Str	2	4	7	9
Štv	2	5	7	
Pia	3	5	8	

Ak by sme si chceli objednať jedlá 1, 2, 3, 4, 5, mohli by sme si ich objednať v poradí 1, 4, 2, 5, 3, t. j. v pondelok jedlo číslo 1, v utorok jedlo číslo 4 atď. Nájdite päť rôznych jedál tak, aby sme si ich nevedeli objednať (každý deň jedno jedlo).

- N4** Do každého poľa tabuľky s 3 riadkami a 4 stĺpcami vpíšte jedno z čísel 1 až 6 tak, aby platilo: „Pre ľubovoľnú trojicu navzájom rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dokážeme z každého riadku tabuľky vybrať jedno pole, aby vo vybraných poliach bola táto trojica čísel“.
- D1** Kuchár varí j jedál. Na každý z $d \leq j$ dní zostaví jedálny lístok obsahujúci nie nutne rovnaký počet jedál. Musí zaručiť, aby si ľubovoľných d rôznych jedál z týchto j jedál bolo možné počas týchto d dní v nejakom poradí objednať (každý deň jedno jedlo). Určte najmenší možný súčet počtov jedál zo všetkých d jedálnych lístkov.
- D2** Každé políčko tabuľky 68×68 máme ofarbiť jednou z troch farieb (červená, modrá, biela). Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby každá trojica susedných políčok v každom riadku a v každom stĺpci obsahovala políčka všetkých troch farieb?

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie C

1

- N1** Máme 7 zlatých a 3 strieborné mince. Ako ich máme usporiadať do radu tak, aby v aspoň jednej skupine piatich susedných mincí bolo viac strieborných ako zlatých mincí?

Riešenie:

Napríklad SSSZZZZZZZ alebo aj ZZSZSZSZZZ.

- N2** Vo vrecúšku je 10 guľôčok, každá je buď modrá, alebo červená. Ak z vrecúška vytiahneme 5 guľôčok, vždy sú aspoň tri z nich modré. Koľko môže byť vo vrecúšku modrých guľôčok?

Riešenie:

Ak by boli vo vrecúšku aspoň 3 červené guľôčky, tak by sme ich mohli vytiahnuť naraz a nebola by platná podmienka v zadaní. Ak sú vo vrecúšku najviac 2 červené guľôčky, tak z piatich vytiahnutých budú aspoň 3 modré. Vo vrecúšku preto môže byť 8, 9 alebo 10 modrých guľôčok.

- N3** Máme 10 mincí, z ktorých každá je buď zlatá, alebo strieborná. Mince sú usporiadané v rade tak, že dve strieborné mince nie sú vedľa seba. Koľko zlatých mincí môžeme mať? Určte všetky možnosti.

Riešenie:

5 až 10. V situácii SZSZSZSZSZ máme 5 zlatých mincí. Nahrádzaním striebornej mince za zlatú podmienku neporušíme a dostaneme tak počty mincí od 6 do 10. Ukážeme dva spôsoby, ako dokázať, že menej ako 5 zlatých mincí mať nemôžeme. Prvý spôsob založíme na pozorovaní, že sa nám „oplatí“ dávať strieborné mince čo najskôr. (Treba si však dať pozor, že toto nie je úplné zdôvodnenie.) Očíslujme si pozície mincí od 1 do 10 (zľava doprava). Prvá strieborná minca (zľava) môže byť najskôr na pozícii 1. Druhá nesmie susediť s prvou, preto musí byť aspoň o 2 pozície vpravo, teda aspoň na pozícii 3. Analogicky tretia strieborná minca musí byť aspoň na pozícii 5, štvrtá aspoň na 7 a piata aspoň na pozícii 9. Šiesta strieborná minca by musela byť aspoň na pozícii 11, ktorá však neexistuje. Preto strieborných mincí nemôže byť viac ako 5, a teda zlatých je aspoň 5. Druhé riešenie je kratšie: rozdeľme mince na 5 párov susedných mincí. Pár nemôže obsahovať dve strieborné, preto musí obsahovať aspoň jednu zlatú mincu. Keďže párov je 5, musíme mať aspoň 5 zlatých mincí.

- N4** Máme 20 mincí, z ktorých každá je buď zlatá, alebo strieborná. Mince sú usporiadané v obdĺžniku tvorenom dvomi radmi po 10 mincí tak, že dve strieborné mince nie sú vedľa seba ani v riadku, ani v stĺpci. Koľko zlatých mincí môžeme mať? Určte všetky možnosti.

Riešenie:

10 až 20. Z predošlej úlohy vieme, že v rade 10 mincí musí byť aspoň 5 zlatých mincí. V dvoch radoch musí byť teda aspoň 10 zlatých mincí. Počet 10 zlatých mincí možno dosiahnuť takto

ZSZSZSZSZS

SZSZSZSZSZ

Počty od 11 do 20 získame postupným nahrádzaním strieborných mincí za zlaté.

- D1** Vyriešte zadanú úlohu pre 19 mincí (podmienka skupiny 7 susedných mincí ostáva bez zmeny).

Riešenie:

Zlatých mincí môže byť od 10 do 19. Očíslujme si mince po rade zľava doprava číslami od 1 do 19. V každej z prvých dvoch sedmíc mincí (mince 1–7, 8–14) musia byť aspoň 4 zlaté mince. Medzi piatimi poslednými mincami (s číslami 15–19) musia byť aspoň 2 zlaté mince, pretože inak ani keby 13. a 14. minca boli zlaté, posledných 7 mincí (13–19) by nespĺňalo podmienku zo zadania. Dokopy ich musí byť aspoň $2 \cdot 4 + 2 = 10$. Jedno z vyhovujúcich usporiadaní 10 zlatých mincí je SSSZZZZSSSSZZSSSSZZ.

Ako sme mohli v predošlých úlohách vidieť, kľúčovým bolo určiť najmenší možný počet zlatých mincí. Všetky vyššie počty sa dali ľahko dosiahnuť zamenou strieborných mincí za zlaté. Preto sa v ďalších doplňujúcich úlohách bližšie pozrieme na úlohy na hľadanie najmenšieho (príp. najväčšieho) možného počtu. Často náročnejšou časťou týchto úloh je zdôvodniť, prečo sa menší (príp. väčší) počet nedá dosiahnuť. Častým spôsobom argumentácie je rozdeliť si situáciu na niekoľko menších častí a sčítať odhady pre ne – ako sme v úlohe N3 sčítali odhady pre páry a v úlohe N4 pre prvý a druhý riadok.

- D2** Pavol rieši nasledovnú úlohu: „Na tabuli sú napísané čísla 1, 2, ..., 20. Koľko najviac čísel z tabule vieme zakrúžkovať tak, aby neexistovali dve zakrúžkované čísla, z ktorých jedno delí druhé?“ Jeho riešenie znie nasledovne: „Keďže chceme zakrúžkovať čo najviac čísel, tak zakrúžkujeme prvočísla, lebo tie majú najmenej deliteľov a navzájom sa nedelia. Zakrúžkujeme teda 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Teda najviac možno zakrúžkovať 8 čísel.“ Je Pavlovo riešenie úplné a správne (vrátane odôvodnenia)?

Riešenie:

Nie. Problém je v Pavlovej „argumentácii“ o optimalite. Napríklad namiesto dvoch zakrúžkovaných prvočísel 2 a 3 môžeme zakrúžkovať tri čísla 4, 6 a 9.

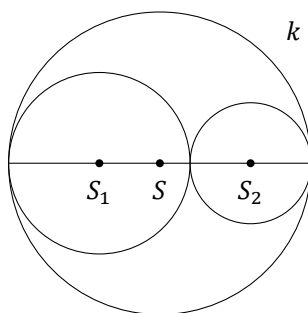
- D3** Vyriešte Pavlovu úlohu.

Riešenie:

10. Pozrime sa na 5 množín: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14\}$ a $\{9, 18\}$. Pre každú z týchto množín platí, že ak zakrúžkujeme ľubovoľné dve čísla z nej, tak jedno bude deliť druhé. Preto z každej z týchto množín vieme zakrúžkovať najviac jedno číslo. Mimo týchto množín ostalo 5 čísel 11, 13, 15, 17 a 19, z ktorých vieme zakrúžkovať najviac 5. Dostávame tak, že počet zakrúžkovaných čísel musí byť menší alebo rovný 10. Tento počet aj možno dosiahnuť zakrúžkovaním čísel 11, 12, ..., 20, z ktorých zjavne žiadne nedelí iné.

2

- N1** Do kružnice k s polomerom 2 sú vpísané dve menšie kružnice, ktoré sa navzájom dotýkajú, súčasne sa zvnútra dotýkajú kružnice k a stredy všetkých troch kružníc ležia na jednej priamke.

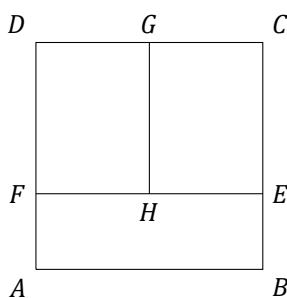


Ukážte, že obvod kružnice k sa rovná súčtu obvodov dvoch menších kružníc.

Riešenie:

Označme polomery dvoch vpísaných kružníc do kružnice k ako x a y . Z polohy stredov kružníc vyplýva, že súčet priemerov vpísaných kružníc je rovný priemeru kružnice k , t. j. $2x + 2y = 4$, a preto $y = 2 - x$. Súčet obvodov vpísaných kružníc tak je $2\pi x + 2\pi(2 - x) = 4\pi$, čo je zrejme obvod kružnice k s polomerom 2.

- N2** Štvorec $ABCD$, kde $|AB| = 20$, sme rozdelili úsečkami EF , pričom $EF \parallel AB$, a GH , pričom $GH \parallel BC$ a $G \in CD$, na 3 obdĺžniky podobne ako na obrázku. Každý z obdĺžnikov $ABEF$, $CEHG$, $DFHG$ má rovnaký obvod. Určte tento obvod.



Riešenie:

50. Ak označíme $|BE| = |AF| = x$, tak $|DF| = |GH| = |CE| = 20 - x$. Pretože obdĺžniky $CEHG$ a $DFHG$ s rovnakým obvodom majú jednu stranu rovnako dlhú, musia mať rovnako dlhú aj druhú stranu, t. j. $|FH| = |HE| = |CG| = |DG| = 20/2 = 10$. Teraz už ľahko z rovnosti obvodov obdĺžnikov $ABEF$ a $CEHG$ dopočítame

$$\begin{aligned} 2(|AB| + |BE|) &= 2(|CE| + |HE|), \\ 20 + x &= (20 - x) + 10, \\ x &= 5 \end{aligned}$$

a hľadaný obvod je $2(20 + x) = 50$.

- D1** Štvorec $ABCD$ zložený z $n \times n$ jednotkových štvorčekov (kde $n \in \mathbb{N}^+$) sme rozdelili na tri obdĺžniky tak, že všetky majú rovnaký obsah a každý sa dotýka zvyšných dvoch (podobne ako v predošlej návodnej úlohe). Strihy sú vedené po stranách jednotkových štvorčekov. Určte najmenšiu hodnotu n , pre ktorú je také rozdelenie možné.

Riešenie:

$n = 6$. Najprv si uvedomíme, že obsah každého z troch obdĺžnikov musí byť rovný tretine obsahu štvorca $ABCD$, t. j. $\frac{1}{3}n^2$. Preto druhá strana obdĺžnika, ktorý má jednu stranu dlhú $|AB|$, musí mať dĺžku $\frac{1}{3}n$, keďže $|AB| = n$. Následne dopočítame dĺžky strán dvoch rovnakých obdĺžnikov – jedna z nich je $\frac{1}{2}n$ a druhá $\frac{2}{3}n$. Aby boli dĺžky všetkých strán obdĺžnikov celé čísla, musí byť číslo n deliteľné dvoma aj tromi a najmenšie také číslo je 6. Potom rozmery obdĺžnikov sú 6×2 a dvakrát 4×3 .

- D2** List papiera v tvare obdĺžnika $ABCD$, $|AB| > |BC|$, preložíme tak, že vrchol A splynie s bodom C . Zdôvodnite, prečo je obvod výsledného päťuholníka menší ako obvod obdĺžnika $ABCD$.

Riešenie:

Označme strany obdĺžnika ako $|AB| = a$, $|BC| = b$ a postupujeme podľa druhého riešenia úlohy 74-C-I-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=5370#page=1>). Z Pytagorovej vety v lichobežníku $APRD$ je $|PR|^2 = (x - y)^2 + b^2$. Obvod päťuholníka je $(a - x) + b + b + y + \sqrt{(x - y)^2 + b^2}$. Postupnými úpravami dokážeme, že je menší ako $2(a + b)$:

$$\begin{aligned}(a - x) + b + b + y + \sqrt{(x - y)^2 + b^2} &< 2(a + b), \\ \sqrt{(x - y)^2 + b^2} &< x - y + a, \\ (x - y)^2 + b^2 &< (x - y)^2 + 2a(x - y) + a^2,\end{aligned}$$

čo platí vďaka $a > b > 0$ a $x > y$.

3

- N1** Nájdite všetky celé čísla $n \geq 2$, ktoré sú o 76 väčšie ako ich najmenší prvočiniteľ.

Riešenie:

$n = 78$. Nech p je najmenší prvočiniteľ čísla n , potom má platiť $n = p + 76$. Zrejme $p \mid n$, a preto p delí aj $76 = 2^2 \cdot 19$. Pretože p je prvočíslo, máme len dve možnosti: $p = 2$ alebo $p = 19$. Pre $p = 2$ dostaneme vyhovujúce $n = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Pre $p = 19$ dostaneme $n = 95 = 5 \cdot 19$, ale 19 nie je najmenší prvočiniteľ čísla n .

- N2** Nájdite všetky prvočísla p, q také, že $p \neq q$ a číslo pq je o 76 menšie ako súčet všetkých jeho kladných deliteľov.

Riešenie:

$(p, q) \in \{(2, 73), (73, 2)\}$. Súčet všetkých kladných deliteľov čísla pq je $1 + p + q + pq$, a teda máme riešiť rovnicu $1 + p + q + pq = pq + 76$, t. j. $p + q = 75$. Kvôli parite musí byť jedno prvočíslo párne a druhé nepárne, preto jedno z nich musí byť 2 a druhé je $75 - 2 = 73$, čo je tiež prvočíslo a skutočne číslo $2 \cdot 73$ je o 76 väčšie ako $1 + 2 + 73 + 2 \cdot 73$. Iné riešenie neexistuje.

- D1** Číslo n je o 5 väčšie ako trojnásobok jeho najväčšieho nepárneho deliteľa. Určte číslo n .

Riešenie:

$n \in \{8, 20\}$. Označme najväčšieho nepárneho deliteľa čísla n ako D , má platiť $n = 3D + 5$. Ale n je deliteľné číslom D , preto D delí aj číslo 5. Pre $D = 1$ máme $n = 8$ a pre $D = 5$ máme $n = 20$. V oboch prípadoch je D najväčším nepárnym deliteľom čísla n , a teda úloha má dve riešenia $n \in \{8, 20\}$.

- D2** Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n .

Riešenie:

63-C-I-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=1009#page=2>)

- D3** Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré majú práve 6 deliteľov, pričom súčet druhého najväčšieho a druhého najmenšieho z nich je 54.

Riešenie:

65-B-II-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=29#page=23>)

N1 Ukážte, že pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla a, b platí nerovnosť

$$(a + b)^2 \geq (a - b)^2,$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

Riešenie:

Nerovnosť budeme postupne ekvivalentne upravovať tak, aby sme dostali nejaké evidentne platné tvrdenie. V tejto úlohe sa dopracujeme k nerovnosti $4ab \geq 0$, ktorá zrejme platí, lebo zadané čísla sú nezáporné. Roznásobením oboch strán zadanej nerovnosti dostaneme $a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2$ a po odpočítaní $a^2 + b^2$ od oboch strán dostávame $2ab \geq -2ab$, z čoho po prenesení už plynie pravdivá nerovnosť $4ab \geq 0$. Zadaná nerovnosť platí preto, lebo otočením poradia úprav sa z platnej nerovnosti $4ab \geq 0$ vieme dostať až k nerovnosti $(a + b)^2 \geq (a - b)^2$. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $4ab = 0$, t. j. ak $a = 0$ alebo $b = 0$.

N2 Pre reálne čísla a, b, c platí

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2, \quad a > b > c.$$

Koľko najviac z čísel a, b, c môže byť záporných?

Riešenie:

Najviac jedno. Ak by bolo $b < 0$, tak aj $c < b < 0$. Potom ale platí $c^2 = (-c)^2 > (-b)^2 = b^2$, čo je v spore s $b^2 \geq c^2$. Iba c záporné byť môže, stačí preveriť $c = -1, b = 2, a = 3$, naozaj $3^2 \geq 2^2 \geq (-1)^2$ a $3 > 2 > -1$.

V úlohách požadujúcich nájsť najväčšiu/najmenšiu hodnotu musíme po nájdení tej hodnoty vykonať dva kroky – nájsť príklad, kedy sa tá najväčšia/najmenšia hodnota presne dosahuje, a ukázať, že vo všetkých ostatných prípadoch bude hodnota nie väčšia/nie menšia ako nami nájdená hodnota.

N3 Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y platí nerovnosť

$$|x + y| \geq |x| - |y|.$$

Riešenie:

V tejto úlohe využijeme trojuholníkovú nerovnosť $|a| + |b| \geq |a + b|$. Prepíšeme si zadanú nerovnosť do tvaru $|x + y| + |y| \geq |x|$, ktorý nápadne pripomína trojuholníkovú nerovnosť. Potrebovali by sme, aby pre nejako šikovne zvolené hodnoty a a b platilo, že $|a|$ a $|b|$ sú čísla $|x + y|$ a $|y|$ (ľavá strana trojuholníkovej nerovnosti) a $|a + b| = |x|$ (pravá strana). To platí, ak $a = x + y$ a $b = -y$. Vychádzame teda zo všeobecne platnej trojuholníkovej nerovnosti, do ktorej dosadíme $a = x + y$ a $b = -y$ a tak dostaneme $|x + y| + |y| = |x + y| + |-y| \geq |(x + y) + (-y)| = |x|$. Odčítaním $|y|$ dostávame zadanú nerovnosť.

D1 Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2. \end{aligned}$$

Riešenie:

58-B-I-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=29#page=2>)

D2 Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokážte, že potom platí aj $c^2 + ab \leq ac + bc$.

Riešenie:

63-C-II-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=1079#page=2>)

D3 Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b, c > d$ platí

$$a + b > c + d, \quad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$.

Riešenie:

69-A-I-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3382#page=1>)

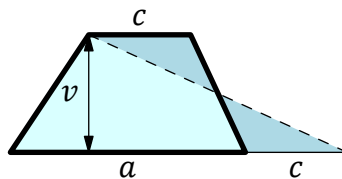
N1 Prečo ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom?

Riešenie:

Nech M je stred strany BC trojuholníka ABC . Ťažnica AM rozdeľuje stranu BC na dve rovnaké úsečky, ktoré sú základňami trojuholníkov ABM a ACM s rovnakou výškou.

N2 Pripomeňme si, ako sa počíta obsah lichobežníka a prečo tomu tak je.

Riešenie:



N3 Medzi dvoma rovnobežkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdialenosť od priamky p je dvakrát väčšia ako jeho vzdialenosť od priamky q . Uvažujme body K a L ležiace postupne na priamkách p a q také, že bod M leží na úsečke KL . Dokážte, že bod M rozdeľuje úsečku KL v pomere $2 : 1$.

Riešenie:

Dokreslíme kolmicu na priamku p prechádzajúcu bodom M a z podobnosti pravouhlých trojuholníkov (podľa vety *uu*) vyplýva hľadaný pomer.

N4 Medzi dvoma rovnobežkami p a q leží bod M tak, že jeho vzdialenosť od priamky p je rovnaká ako jeho vzdialenosť od priamky q . Uvažujme body A, B ležiace na priamke p a body C, D ležiace na priamke q tak, že bod M je priesečníkom úsečiek AD a BC a polpriamky AB a CD sú súhlasné. Dokážte, že trojuholníky ABM a DCM sú zhodné.

Riešenie:

Uhly AMB a DMC sú vrcholové a uhly ABM a DCM sú striedavé, preto $\triangle ABM \sim \triangle DCM$ podľa vety *uu*. Podobne ako v predošlej návodnej úlohe dokreslením kolmice na priamku p nám vzniknú zhodné pravouhlé trojuholníky s preponami BM a CM a teda $|BM| = |CM|$, z čoho už plynie $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ podľa vety *usu*.

N5 V trojuholníku ABC označme stredy jeho strán AB, BC a AC postupne K, L a M . Priesečník úsečiek AL a BM označme O . Koľkokrát je obsah trojuholníka ABC väčší ako obsah trojuholníka AKO ?

Riešenie:

Je šesťkrát väčší. Úsečky AL a BM sú ťažnice trojuholníka ABC , a preto O je jeho ťažisko. Vieme, že ťažisko O rozdeľuje úsečku CK v pomere $2 : 1$, $|KO| : |OC| = 1 : 2$, a teda $|KO| : |KC| = 1 : 3$. Ak označíme päty výšok z bodov O a C na stranu AB ako P a R , tak z podobnosti $\triangle KPO \sim \triangle KRC$ podľa vety *uu* v pomere $|KO| : |KC| = 1 : 3$ vyplýva $|PO| : |RC| = 1 : 3$. Úsečky PO a RC sú ale aj výškami trojuholníkov ABO a ABC , ktoré majú spoločnú základňu, a preto sú obsahy trojuholníkov ABO a ABC v rovnakom pomere, t. j. $S_{ABO} : S_{ABC} = 1 : 3$. Bod K je stredom strany AB , preto $S_{AKO} = S_{BKO}$, z čoho nakoniec plynie $S_{AKO} : S_{ABC} = 1 : 6$.

D1 Nech P a Q sú postupne stredy strán BC a AC trojuholníka ABC . Nech rovnobežka s AC prechádzajúca stredom K úsečky PQ pretína priamku BQ v bode L a priamka PL pretína úsečku AC v bode M . Dokážte, že M je stred úsečky AQ .

Riešenie:

74-C-I-5 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=5370#page=4>)

D2 Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD . Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC . Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$.

Riešenie:

55-C-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=241#page=1>)

D3 Daný je obdĺžnik $ABCD$, pričom $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA sú dané postupne body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdĺžnik a platí $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočítajte pomer obsahov obdĺžnikov $ABCD$ a $KLMN$.

Riešenie:

73-C-I-6 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4902#page=5>)

6

N1 Vo vrecúšku sú štyri guľôčky – biela, červená, modrá a zelená. V každom ťahu vytiahneme naraz 3 rôzne guľôčky, pozrieme si ich a vrátime do vrecúška. Koľkokrát musíme zopakovať ťahy, aby sme si boli istí, že vytiahneme rovnakú trojicu guľôčok?

Riešenie:

Päťkrát. Zo štyroch farieb vytvoríme všetky možné trojice: (biela, červená, modrá), (biela, červená, zelená), (biela, modrá, zelená), (červená, modrá, zelená) – takto vieme vyťahovať štyrikrát rôznu trojicu. Viac rôznych trojíc neexistuje, preto najneskôr v piatom ťahu vytiahneme trojicu, ktorú sme už videli.

- N2** Kuchár varí tri jedlá. Na každý z dvoch dní zostaví jedálny lístok obsahujúci nie nutne rovnaký počet jedál. Musí zaručiť, aby si ľubovoľné dve rôzne jedlá z týchto troch bolo možné počas týchto dvoch dní v nejakom poradí objednať (každý deň jedno jedlo). Dokážte, že každý deň musel jedálny lístok obsahovať aspoň 2 jedlá, a nájdite taký príklad jedálnych lístkov na oba dni s práve dvoma jedlami.

Riešenie:

Zrejme každý deň musí kuchár variť aspoň jedno jedlo. Označme si jedlá ako A, B a C . Ak by v nejaký deň navaril iba jedno jedlo, napríklad A , tak si objednáme jedlá B a C a nebude splnená požadovaná podmienka. Ostáva preveriť, že ak kuchár navarí v prvý deň jedlá A a B a v druhý jedlá A a C , tak pre ľubovoľnú z možných dvojíc jedál (A, B) , (A, C) alebo (B, C) platí, že si ich vieme v nejakom poradí dní objednať. Napr. pre dvojicu (A, B) si objednáme B v prvý a A v druhý deň a pod.

- N3** Kuchár varí 9 jedál (označených číslami 1, 2, ..., 9) a zostavil takýto jedálny lístok:

Pon	1	3	6	8
Ut	1	4	6	9
Str	2	4	7	9
Štv	2	5	7	
Pia	3	5	8	

Ak by sme si chceli objednať jedlá 1, 2, 3, 4, 5, mohli by sme si ich objednať v poradí 1, 4, 2, 5, 3, t. j. v pondelok jedlo číslo 1, v utorok jedlo číslo 4 atď. Nájdite päť rôznych jedál tak, aby sme si ich nevedeli objednať (každý deň jedno jedlo).

Riešenie:

Napr. 1, 3, 4, 6, 8. Ak si jedlo 1 objednáme v pondelok, tak jedlá 3 aj 8 si musíme objednať v piatok, čo nejde. Číže jedlo 1 si musíme objednať v utorok. Potom jedlo 6 si musíme objednať v pondelok a jedlo 4 v stredu, následne jediná možnosť pre jedlo 8 je piatok a jedlo 3 si už nemôžeme objednať ani v pondelok, ani v piatok. Vyhovuje tiež napríklad akákoľvek päťica obsahujúca jedlá 1, 4, 6, 9, pretože tá sa varí len v tri rôzne dni (pondelok, utorok a streda).

- N4** Do každého poľa tabuľky s 3 riadkami a 4 stĺpcami vpíšte jedno z čísel 1 až 6 tak, aby platilo: „Pre ľubovoľnú trojicu navzájom rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dokážeme z každého riadku tabuľky vybrať jedno pole, aby vo vybraných poliach bola táto trojica čísel“.

Riešenie:

Existuje viacero možných zápisov čísel do tabuľky, jeden z nich je

1	2	3	4
1	2	5	6
3	4	5	6

- D1** Kuchár varí j jedál. Na každý z $d \leq j$ dní zostaví jedálny lístok obsahujúci nie nutne rovnaký počet jedál. Musí zaručiť, aby si ľubovoľných d rôznych jedál z týchto j jedál bolo možné počas týchto d dní v nejakom poradí objednať (každý deň jedno jedlo). Určte najmenší možný súčet počtov jedál zo všetkých d jedálnych lístkov.

Riešenie:

- D2** Každé políčko tabuľky 68×68 máme ofarbiť jednou z troch farieb (červená, modrá, biela). Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby každá trojica susedných políčok v každom riadku a v každom stĺpci obsahovala políčka všetkých troch farieb?

Riešenie:

68-C-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3126#page=1>)

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - recenzenti: Tomáš Jurík, Jozef Rajník