

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z9

1 Do tabuľky na obrázku doplňte prirodzené čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bolo v každom riadku a v každom stĺpci práve raz,
- súčet desiatich čísel v sivo vyznačenej časti bol 21.

Nájdite všetky možnosti.

(Josef Tkadlec)

N1 Do nasledujúcej tabuľky napíšte čísla 1, 2, 3 tak, aby sa v každom riadku aj v každom stĺpci každé z týchto čísel vyskytovalo práve raz. Svoj postup riešenia zdôvodnite slovné.

1		
	2	
		3

N2 Do nasledujúcej tabuľky napíšte čísla 1, 2, 3 tak, aby sa v každom riadku aj v každom stĺpci každé z týchto čísel vyskytovalo práve raz a zároveň aby súčet čísel v orámovanej časti bol maximálny možný. Určte tento súčet.

N3 Do nasledujúcej tabuľky napíšte čísla od 1 do 9 (v ľubovoľných počtoch) tak, aby sa v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci žiadne číslo neopakovalo a súčet všetkých čísel tabuľky bol

- a) maximálny možný;
- b) minimálny možný.

D1 Hviezdny štvorec je taká štvorcová tabuľka čísel, v ktorej platí, že súčty čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch sú stále rovnaké. Na obrázku je pozostatok hviezdneho štvorca, v ktorom boli čísla v jednom riadku a jednom stĺpci vymazané.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

Doplňte chýbajúce čísla tak, aby všetky čísla boli celé a práve štyri záporné. Určte všetky možnosti.

2 Nájdite všetky šesticte kladných reálnych čísel (a, d, e, s, t, v) také, že:

$$d \cdot v \cdot a = d \cdot v \cdot e = 2,$$

$$\begin{aligned}s \cdot e \cdot s \cdot t &= 6, \\ d \cdot e \cdot v \cdot a \cdot t &= 9, \\ d \cdot e \cdot s \cdot a \cdot t &= 10, \\ d \cdot v \cdot a \cdot d \cdot s \cdot a \cdot t &= 20.\end{aligned}$$

(Josef Tkadlec, Stanislav Krajčí)

N1 Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned}a \cdot b \cdot c &= 14 \\ a \cdot c &= 20\end{aligned}$$

Určte hodnotu b .

N2 Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned}a \cdot b &= 3 \\ b \cdot c &= 6 \\ a \cdot c &= 9\end{aligned}$$

Aké hodnoty môže nadobúdať súčin $a \cdot b \cdot c$? Pre každú z nich uveďte aj príslušné čísla a, b, c .

N3 Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned}a \cdot b \cdot c^2 &= 12\sqrt{6} \\ a^2 \cdot c^2 &= 12\end{aligned}$$

Aké hodnoty môže nadobúdať súčin $b \cdot c$? Pre každú z nich uveďte aj príslušné čísla a, b, c .

D1 Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned}a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 &= 2 \\ a^6 \cdot b^5 \cdot c^2 &= 12 \\ a^3 \cdot b^3 \cdot c &= 3\end{aligned}$$

Aké hodnoty môže nadobúdať súčin $a \cdot b \cdot c$? Pre každú z nich uveďte aj príslušné čísla a, b, c .

3 Sú dané sústredné kružnice k, l a body A, B, C, D tak, že platí:

- polomer kružnice k je 10 cm a polomer kružnice l je väčší ako polomer kružnice k ,
- AB je tetiva kružnice k a meria 16 cm,
- CD je tetiva kružnice l kolmá na tetivu AB a prechádza bodom B ,
- trojuholník ABC je rovnoramenný.

Aká môže byť dĺžka tetivy CD ? Určte všetky možnosti.

(Marián Macko)

N1 Je daný obdĺžnik so stranami dĺžky 4 cm a 6 cm, ktorému je opísaná kružnica. Určte polomer tejto kružnice.

N2 Kružnica k má stred S a polomer 13 cm. Jej tetiva AB je od bodu S vzdialená 5 cm. Vypočítajte dĺžku tetivy AB .

N3 Sú dané dve sústredné kružnice k, l so spoločným stredom S , kde l má menší polomer než k . Tetiva AB kružnice k je od bodu S vzdialená 1 cm, pritom jej priesečníky s kružnicou l ju rozdeľujú na tri rovnaké úsečky. Každá z nich má dĺžku 4 cm. Určte polomery kružníc k a l .

D1 Je daná kružnica k so stredom A a polomerom 12 cm a kosoštvorec $ABCD$ tak, že bod C leží na kružnici k a $|AB| = 10$ cm. Kružnica k vyťína na priamke BD tetivu. Určte vzdialenosti bodu B od krajných bodov tejto tetivy.

4 Vo vstupnej hale kina bolo niekoľko jednomiestnych a niekoľko trojmiestnych sedačiek. Raz si uvádzačka všimla, že v hale sedelo 25 ľudí a 10 sedačiek bolo prázdnych. Inokedy si uvádzačka všimla, že v hale sedelo 14 ľudí a 7 sedačiek bolo prázdnych. V oboch prípadoch bola každá trojmiestna sedačka buď prázdna, alebo úplne obsadená.

Koľko jednomiestnych a koľko trojmiestnych sedačiek mohlo byť v hale? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

N1 K šošovici na kyslo dávali v reštaurácii k porcii buď dve, alebo tri vajcia natvrdo, podľa prania zákazníka.

a) Koľko najviac porcií urobili, ak použili práve 20 vajec?

- b) Koľko najmenej porcií urobili, ak použili práve 20 vajec?
 c) Koľko najviac a koľko najmenej vajec je treba na 20 porcií?

- N2** Máme rozdeliť 15 bonbónov na kôpky po troch, alebo po štyroch bonbónoch. Koľko takých kôpok bude? Nájdite všetky možnosti.
- N3** Deti v tábore získavali za splnené úlohy body. Tie bolo možné ďalej vymieňať: päť bodov za nálepku, šesť bodov za pečiatku. Jaro si prepočítal, že keby chcel iba nálepky, zostal by mu jeden bod nevyužitý. Keby si vybral iba pečiatky, nevyužil by tri body. Nakoniec dokázal uplatniť všetky svoje body, pričom získal dvojnásobné množstvo pečiatok než nálepiek. Koľko najmenej bodov mal Jaro pred výmenou?
- D1** Úloha zo stredovekej zbierky Alkuina z Yorku:¹ Na statku žilo 30 ľudí. Gazda nariadil, aby medzi nich rozdelili 30 meríc obilia, a to tak, že každý muž dostal 3 merice, každá žena 2 merice a každé dieťa pol merice obilia. Obilie vystačilo presne. Koľko mužov, žien a detí žilo na statku? Nájdite všetky riešenia.

5 Dvaja hráči hrajú hru podľa nasledujúcich pravidiel:

- Na začiatku hry je na tabuli napísané číslo 100.
- Vždy začína ten istý hráč a pri ťahoch sa hráči pravidelne striedajú.
- V každom ťahu hráč zotrie číslo a nahradí ho novým číslom, ktoré vznikne z predchádzajúceho buď odčítaním čísla 1, alebo vydelením číslom 2.
- Každé číslo na tabuli musí byť prirodzené.
- Vyhráva hráč, ktorý napíše číslo 1.

Má vyhrávajúcu stratégiu prvý, alebo druhý hráč? Aký je najmenší počet jeho ťahov, ktorými si vie zaručiť výhru?

(Iveta Jančígová)

- N1** Uvažujme hru zo súťažnej úlohy s tým rozdielom, že počiatočným číslom bude 8. Ako by mohli vyzerat všetky priebehy tejto hry?
- N2** Ako by vyzerala hra zo súťažnej úlohy s najrýchlejším priebehom (t. j. s najmenej ťahmi)? Kto by vyhral?
- N3** Nájdite najmenšie tri počiatočné čísla hry tak, ako v súťažnej úlohe, keď existuje výherná stratégia pre druhého hráča.
- D1** Hra NIM má mnoho variantov, uvažujme ten s nasledujúcimi pravidlami: Na kôpke je 10 zápalkiek. Hrajú dvaja hráči, ktorí sa pravidelne striedajú v ťahoch. V každom ťahu môže hráč odobrať 1, alebo 2 zápalky. Prehráva ten hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku z kôpky. Nájdite víťaznú stratégiu pre druhého hráča.

6 Je daný rovnobežník $ABCD$ a jeho vnútorný bod P s týmito vlastnosťami:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15^\circ$.

Určte veľkosť uhla APB .

(Patrik Bak)

- N1** V rovnobežníku $ABCD$ je vnútorný uhol pri vrchole A o 30° väčší než vnútorný uhol pri vrchole B . Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka.
- N2** Je daný rovnoramenný trojuholník RST so základňou RS . Označme $\varphi = |\sphericalangle RTS|$. Pomocou φ vyjadrite veľkosti ostatných vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka RST .
- N3** Rozdeľte pravidelný päťuholník na tri rovnoramenné trojuholníky. (Rovnoramennosť trojuholníkov zdôvodnite!)
- D1** V trojuholníku ABC leží bod D na strane BC , bod E na strane AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určte veľkosti uhlov ACB a BAD .

¹Možno nájsť v knihe K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh* (Prometheus, Praha, 2001, dostupné online: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401217>).

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z9

1 Do tabuľky na obrázku doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bolo v každom riadku a v každom stĺpci práve raz,
- súčet desiatich čísel v sivo vyznačenej časti bol 21.

Nájdite všetky možnosti.

(Josef Tkadlec)

N1 Do nasledujúcej tabuľky napíšte čísla 1, 2, 3 tak, aby sa v každom riadku aj v každom stĺpci každé z týchto čísel vyskytovalo práve raz. Svoj postup riešenia zdôvodnite slovne.

1		
	2	
		3

Riešenie:

Umiestnenie čísel v druhom stĺpci a druhom riadku je jednoznačne dané: na prvom mieste v nich je vždy 3, na poslednom mieste potom 1. Chýbajúce dve čísla potom musia byť 2.

N2 Do nasledujúcej tabuľky napíšte čísla 1, 2, 3 tak, aby sa v každom riadku aj v každom stĺpci každé z týchto čísel vyskytovalo práve raz a zároveň aby súčet čísel v orámovanej časti bol maximálny možný. Určte tento súčet.

Riešenie:

Najväčší možný súčet uvažovaných čísel je 9, jedno také vyplnenie je potom na obrázku:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

N3 Do nasledujúcej tabuľky napíšte čísla od 1 do 9 (v ľubovoľných počtoch) tak, aby sa v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci žiadne číslo neopakovalo a súčet všetkých čísel tabuľky bol

- a) maximálny možný;
- b) minimálny možný.

Riešenie:

Úloha má vždy niekoľko riešení, líšiacich sa umiestnením čísel. Uvádžame príklady takýchto vyplnení tabuľky, pričom najväčší možný súčet je 68 a najmenší 22.

9	8	7	6	5
	9	8	7	
		9		

(a)

1	2	3	4	5
	1	2	3	
		1		

(b)

- D1** Hviezdny štvorec je taká štvorcová tabuľka čísel, v ktorej platí, že súčty čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch sú stále rovnaké. Na obrázku je pozostatok hviezdneho štvorca, v ktorom boli čísla v jednom riadku a jednom stĺpci vymazané.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

Doplňte chýbajúce čísla tak, aby všetky čísla boli celé a práve štyri záporné. Určte všetky možnosti.

Riešenie:

Označme s spoločný súčet čísel v riadku aj v stĺpci. Z prvých troch riadkov vieme vyjadriť chýbajúce čísla v poslednom stĺpci ako: $s - 6$, $s - 15$ a $s - 24$. Z prvých troch stĺpcov vieme vyjadriť chýbajúce čísla v poslednom riadku ako: $s - 12$, $s - 15$ a $s - 18$. Z posledného stĺpca vyjde číslo v pravom dolnom rohu $45 - 2s$; súčet posledného riadku je potom automaticky s , takže podmienke hviezdneho štvorca vyhovuje každé celé s . Doplnené čísla sú záporné postupne pre $s < 6$, $s < 15$, $s < 24$, $s < 12$, $s < 15$, $s < 18$ a pre $s > 22,5$, takže práve štyri z nich sú záporné jedine pre $s = 12$, $s = 13$ a $s = 14$. Úloha má teda tri riešenia (posledný stĺpec zhora, potom posledný riadok zľava):

- $s = 12$: 6, -3, -12 a 0, -3, -6, 21;
- $s = 13$: 7, -2, -11 a 1, -2, -5, 19;
- $s = 14$: 8, -1, -10 a 2, -1, -4, 17.

(69. ročník MO, úloha Z7-I-5.)

- 2** Nájdite všetky šesticice kladných čísel (a, d, e, s, t, v) také, že:

$$d \cdot v \cdot a = d \cdot v \cdot e = 2,$$

$$s \cdot e \cdot s \cdot t = 6,$$

$$d \cdot e \cdot v \cdot a \cdot t = 9,$$

$$d \cdot e \cdot s \cdot a \cdot t = 10,$$

$$d \cdot v \cdot a \cdot d \cdot s \cdot a \cdot t = 20.$$

(Josef Tkadlec, Stanislav Krajčí)

- N1** Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c = 14$$

$$a \cdot c = 20$$

Určte hodnotu b .

Riešenie:

Dosadením $a \cdot c = 20$ do $a \cdot b \cdot c$ dostaneme $20b = 14$. Teda $b = \frac{7}{10}$. Zvyšné dve neznáme môžu byť napríklad $a = 5$, $c = 4$.

- N2** Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b = 3$$

$$b \cdot c = 6$$

$$a \cdot c = 9$$

Aké hodnoty môže nadobúdať súčin $a \cdot b \cdot c$? Pre každú z nich uveďte aj príslušné čísla a, b, c .

Riešenie:

Pretože $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 3 \cdot 6 \cdot 9$, je $a \cdot b \cdot c = \pm\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 9} = \pm 9\sqrt{2}$. Vynásobením napr. prvých dvoch rovníc a dosadením zistenej hodnoty súčinu abc dostaneme $b = \pm\sqrt{2}$, z čoho následne dopočítame hodnoty a, c . Pre súčin $abc = 9\sqrt{2}$ sú riešením hodnoty $a = 3\sqrt{2}/2$, $b = \sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{2}$ a pre súčin $abc = -9\sqrt{2}$ sú to hodnoty $a = -3\sqrt{2}/2$, $b = -\sqrt{2}$, $c = -3\sqrt{2}$.

N3 Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c^2 = 12\sqrt{6}$$
$$a^2 \cdot c^2 = 12$$

Aké hodnoty môže nadobúdať súčin $b \cdot c$? Pre každú z nich uveďte aj príslušné čísla a, b, c .

Riešenie:

Z $a^2 \cdot c^2 = 12$ plynie $a \cdot c = \pm 2\sqrt{3}$. Teda $b \cdot c = (a \cdot b \cdot c^2) : (a \cdot c) = \pm 12\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \pm 6\sqrt{2}$. Vyhovujúca trojica je napríklad $a = 2\sqrt{3}, b = 6\sqrt{2}, c = 1$. Pre druhú hodnotu vyhovuje napríklad trojica $a = -2\sqrt{3}, b = -6\sqrt{2}, c = 1$. Vyhovujúcich trojíc je nekonečne veľa.

D1 Pre reálne čísla a, b, c platí:

$$a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 = 2$$
$$a^6 \cdot b^5 \cdot c^2 = 12$$
$$a^3 \cdot b^3 \cdot c = 3$$

Aké hodnoty môže nadobúdať súčin $a \cdot b \cdot c$? Pre každú z nich uveďte aj príslušné čísla a, b, c .

Riešenie:

Z uvedených rovností plynie

$$(a^3 \cdot b^4 \cdot c^5) \cdot (a^6 \cdot b^5 \cdot c^2) : (a^3 \cdot b^3 \cdot c) = a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = 2 \cdot 12 : 3 = 8.$$

Potom $a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = (a^2 \cdot b^2 \cdot c^2)^3 = 8$, teda $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2$ a $a \cdot b \cdot c = \pm\sqrt{2}$. Z tretej rovnosti navyše plynie $(a \cdot b \cdot c)^3 = (a^3 \cdot b^3 \cdot c) \cdot c^2 = 3c^2 > 0$, takže $a \cdot b \cdot c$ je kladné. Jediná možná hodnota je teda $a \cdot b \cdot c = \sqrt{2}$. Vyhovujúca trojica je napríklad $a = 2^{7/4}\sqrt{3}/3, b = 3/4, c = 2^{3/4}\sqrt{3}/3$.

3 Sú dané sústredné kružnice k, l a body A, B, C, D tak, že platí:

- polomer kružnice k je 10 cm a polomer kružnice l je väčší ako polomer kružnice k ,
- AB je tetiva kružnice k a meria 16 cm,
- CD je tetiva kružnice l kolmá na tetivu AB a prechádza bodom B ,
- trojuholník ABC je rovnoramenný.

Aká môže byť dĺžka tetivy CD ? Určte všetky možnosti.

(Marián Macko)

N1 Je daný obdĺžnik so stranami dĺžky 4 cm a 6 cm, ktorému je opísaná kružnica. Určte polomer tejto kružnice.

Riešenie:

Priemerom kružnice je uhlopriečka obdĺžnika dĺžky $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm. Teda polomer kružnice je $\sqrt{13}$ cm.

N2 Kružnica k má stred S a polomer 13 cm. Jej tetiva AB je od bodu S vzdialená 5 cm. Vypočítajte dĺžku tetivy AB .

Riešenie:

Označme stred tetivy AB ako P . Potom PS je výškou rovnoramenného trojuholníka ABS , a teda $|PS| = 5$ cm.

Z pravouhlého trojuholníka ASP potom pomocou Pytagorovej vety vypočítame $|AP| = \sqrt{|AS|^2 - |PS|^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm. Dĺžka tetivy je $|AB| = 2 \cdot |AP| = 24$ cm.

N3 Sú dané dve sústredné kružnice k, l so spoločným stredom S , kde l má menší polomer než k . Tetiva AB kružnice k je od bodu S vzdialená 1 cm, pritom jej priesečníky s kružnicou l ju rozdeľujú na tri rovnaké úsečky. Každá z nich má dĺžku 4 cm. Určte polomery kružníc k a l .

Riešenie:

Označme stred tetivy AB ako P a priesečníky kružnice l s AB ako K, L ($|AK| = |KL| = |LB| = 4$ cm). Potom z pravouhlého trojuholníka ASP vypočítame polomer kružnice k ako $\sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$ cm. Z trojuholníka KSP spočítame polomer kružnice l ako $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ cm.

D1 Je daná kružnica k so stredom A a polomerom 12 cm a kosoštvorec $ABCD$ tak, že bod C leží na kružnici k a $|AB| = 10$ cm. Kružnica k vytína na priamke BD tetivu. Určte vzdialenosti bodu B od krajných bodov tejto tetivy.

Riešenie:

Označme priesečník uhlopriečok kosoštvorca $ABCD$ ako P , ďalej krajné body tetivy ako K, L (bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že L leží na polpriamke opačnej k PB). Pretože AC je polomer kružnice, platí

$|AP| = 12 : 2 = 6$ cm. Uhlopriečky kosoštvorca sú navzájom kolmé a polia sa, teda aj uvažovaná tetiva je kolmá na AC . Z trojuholníka ABP pomocou Pytagorovej vety potom vypočítame $|PB| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm. Z trojuholníka APL opäť pomocou Pytagorovej vety vypočítame $|PL| = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ cm. Potom vzdialenosť bodu B od krajných bodov tetivy (v nejakom poradí) je $(6\sqrt{3} - 8)$ cm a $(6\sqrt{3} + 8)$ cm.

- 4 Vo vstupnej hale kina bolo niekoľko jednomiestnych a niekoľko trojmiestnych sedačiek. Raz si uvádzačka všimla, že v hale sedelo 25 ľudí a 10 sedačiek bolo prázdnych. Inokedy si uvádzačka všimla, že v hale sedelo 14 ľudí a 7 sedačiek bolo prázdnych. V oboch prípadoch bola každá trojmiestna sedačka buď prázdna, alebo úplne obsadená.

Koľko jednomiestnych a koľko trojmiestnych sedačiek mohlo byť v hale? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

- N1 K šošovici na kyslo dávali v reštaurácii k porcii buď dve, alebo tri vajcia natvrdo, podľa prania zákazníka.

- Koľko najviac porcií urobili, ak použili práve 20 vajec?
- Koľko najmenej porcií urobili, ak použili práve 20 vajec?
- Koľko najviac a koľko najmenej vajec je treba na 20 porcií?

Riešenie:

(a) Najviac urobili $20 : 2 = 10$ porcií. (b) $20 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1$, teda najmenej urobili $6 + 1 = 7$ porcií. (c) Najmenej potrebovali $20 \cdot 2 = 40$ vajec, najviac potom $20 \cdot 3 = 60$ vajec.

- N2 Máme rozdeliť 15 bonbónov na kôpky po troch, alebo po štyroch bonbónoch. Koľko takých kôpok bude? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie:

Je treba rozpísať číslo 15 na súčet násobkov troch a štyroch. To možno urobiť iba ako $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 4$, alebo $15 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4$. Kôpok bonbónov tak mohlo byť päť, alebo štyri.

- N3 Deti v tábore získavali za splnené úlohy body. Tie bolo možné ďalej vymieňať: päť bodov za nálepku, šesť bodov za pečiatku. Jaro si prepočítal, že keby chcel iba nálepky, zostal by mu jeden bod nevyužitý. Keby si vybral iba pečiatky, nevyužil by tri body. Nakoniec dokázal uplatniť všetky svoje body, pričom získal dvojnásobné množstvo pečiatok než nálepiek. Koľko najmenej bodov mal Jaro pred výmenou?

Riešenie:

Ak Jaro získal n nálepiek, pečiatok mal $2n$, dokopy teda mal $5n + 6 \cdot 2n = 17n$ bodov. Pri samých nálepkách mu mal zostať jeden bod, čiže $17n$ dáva po delení piatimi zvyšok 1; pri samých pečiatkach mu mali zostať tri body, čiže po delení šiestimi zvyšok 3. Postupne skúsime 17, 34, 51, ... a prvé vyhovujúce je $51 = 10 \cdot 5 + 1 = 8 \cdot 6 + 3$. Jaro mal teda najmenej 51 bodov, ktoré vymenil za tri nálepky a šesť pečiatok. (70. ročník MO, úloha Z8-II-1.)

- D1 Úloha zo stredovekej zbierky Alkuina z Yorku:² Na statku žilo 30 ľudí. Gazda nariadil, aby medzi nich rozdelili 30 meríc obilia, a to tak, že každý muž dostal 3 merice, každá žena 2 merice a každé dieťa pol merice obilia. Obilie vystačilo presne. Koľko mužov, žien a detí žilo na statku? Nájdite všetky riešenia.

Riešenie:

Označme počty mužov, žien a detí ako m , z a d . Potom pre množstvo obilia a počet ľudí platí:

$$\begin{aligned} 3m + 2z + \frac{1}{2}d &= 30 \\ m + z + d &= 30 \end{aligned}$$

Odčítaním druhej rovnice od dvojnásobku prvej rovnice dostaneme $5m + 3z = 30$. Teda z je násobok piatich (a m musí byť násobok troch). Odtiaľ potom dostaneme tri riešenia:

- Pre $z = 0$ je $m = 6$ a $d = 24$.
- Pre $z = 5$ je $m = 3$ a $d = 22$.
- Pre $z = 10$ je $m = 0$ a $d = 20$. (Má zmysel, pokiaľ gazda nežil na tomto statku.)

- 5 Dvaja hráči hrajú hru podľa nasledujúcich pravidiel:

- Na začiatku hry je na tabuli napísané číslo 100.
- Vždy začína ten istý hráč a pri ťahoch sa hráči pravidelne striedajú.

²Možno nájsť v knihe K. Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh* (Prometheus, Praha, 2001, dostupné online: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401217>).

- V každom ťahu hráč zotrie číslo a nahradí ho novým číslom, ktoré vznikne z predchádzajúceho buď odčítaním čísla 1, alebo vydelením číslom 2.
- Každé číslo na tabuli musí byť prirodzené.
- Vyhráva hráč, ktorý napíše číslo 1.

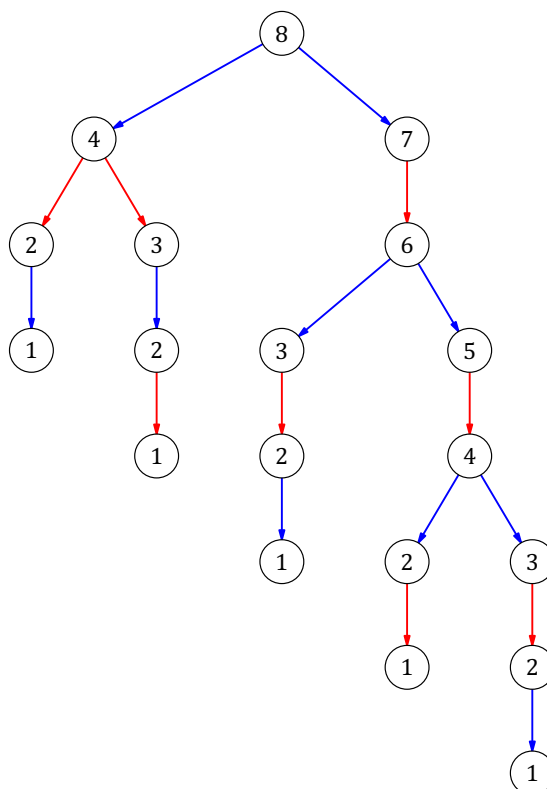
Má vyhrávajúcu stratégiu prvý, alebo druhý hráč? Aký je najmenší počet jeho ťahov, ktorými si vie zaručiť výhru?

(Iveta Jančígová)

N1 Uvažujme hru zo súťažnej úlohy s tým rozdielom, že počiatočným číslom bude 8. Ako by mohli vyzerat všetky priebehy tejto hry?

Riešenie:

Existuje celkom 5 rôznych priebehov, sú zaznamenané v nasledujúcom grafe. Modro sú zakreslené ťahy prvého hráča, červeno ťahy druhého hráča.



N2 Ako by vyzerala hra zo súťažnej úlohy s najrýchlejším priebehom (t. j. s najmenej ťahmi)? Kto by vyhral?

Riešenie:

Ťahy by boli nasledujúce: $100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Vyhral by druhý hráč.

N3 Nájdite najmenšie tri počiatočné čísla hry tak, ako v súťažnej úlohe, keď existuje výherná stratégia pre druhého hráča.

Riešenie:

Sú to čísla 3, 5 a 7; pri optimálnej hre druhého hráča môže hra prebehnúť napríklad takto:

$3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
 $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
 $7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

D1 Hra NIM má mnoho variantov, uvažujme ten s nasledujúcimi pravidlami: Na kôpke je 10 zápalek. Hrajú dvaja hráči, ktorí sa pravidelne striedajú v ťahoch. V každom ťahu môže hráč odobrať 1, alebo 2 zápalky. Prehráva ten hráč, ktorý odoberie poslednú zápalku z kôpky. Nájdite víťaznú stratégiu pre druhého hráča.

Riešenie:

Pre druhého hráča je dôležité, aby po jeho ťahu zostal na kôpke počet zápalek tvaru $3k + 1$, teda postupne 7, 4 a 1. Odoberie teda vždy toľko zápalek, aby doplnil ťah súpera na tri. Potom môže zariadiť, aby na stole zostala jediná zápalka, ktorú je nútený vziať prvý hráč.

6 Je daný rovnobežník $ABCD$ a jeho vnútorný bod P s týmito vlastnosťami:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15^\circ$.

Určte veľkosť uhla APB .

(Patrik Bak)

N1 V rovnobežníku $ABCD$ je vnútorný uhol pri vrchole A o 30° väčší než vnútorný uhol pri vrchole B . Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnobežníka.

Riešenie:

Označme veľkosti vnútorných uhlov pri vrchoch A, B, C, D ako $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. V rovnobežníku potom platí $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$ (prípadne $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$). Odtiaľ už odvodíme, že $\alpha = \gamma = 105^\circ$, $\beta = \delta = 75^\circ$.

N2 Je daný rovnoramenný trojuholník RST so základňou RS . Označme $\varphi = |\sphericalangle RTS|$. Pomocou φ vyjadrite veľkosti ostatných vnútorných a vonkajších uhlov trojuholníka RST .

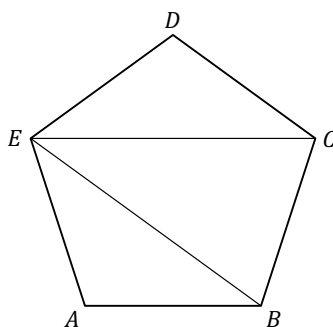
Riešenie:

Vnútorné uhly pri vrchoch R a S majú veľkosť $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Vonkajšie uhly pri vrchoch R, S, T potom majú postupne veľkosti $90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$, $90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$, $180^\circ - \varphi$.

N3 Rozdeľte pravidelný päťuholník na tri rovnoramenné trojuholníky. (Rovnoramennosť trojuholníkov zdôvodnite!)

Riešenie:

Pravidelný päťuholník $ABCDE$ môžeme rozdeliť napríklad na trojuholníky ABE, BCE a CDE . Trojuholníky ABE a CDE sú rovnoramenné, pretože dvojice ich strán tvoria strany päťuholníka, ktoré sú vďaka jeho pravidelnosti rovnako dlhé. Trojuholník BCE je rovnoramenný, pretože BE a CE sú uhlopriečky pravidelného päťuholníka, ktoré sú všetky rovnako dlhé (alebo možno toto zdôvodniť zo zhodnosti trojuholníkov ABE a CDE).



D1 V trojuholníku ABC leží bod D na strane BC , bod E na strane AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určte veľkosti uhlov ACB a BAD .

Riešenie:

Označme $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Trojuholník CDE je rovnoramenný ($|EC| = |CD|$), takže $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Rovnoramenný je aj trojuholník BCE ($|BE| = |EC|$), preto $|\sphericalangle EBC| = \gamma$ a $|\sphericalangle BEC| = 180^\circ - 2\gamma$. Odtiaľ $|\sphericalangle BED| = (180^\circ - 2\gamma) - (90^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = 90^\circ - \frac{3}{2}\gamma$. Z rovnoramenného trojuholníka BDE ($|BD| = |DE|$) však $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle DEB|$, čiže $\gamma = 90^\circ - \frac{3}{2}\gamma$ a $\gamma = 36^\circ$. Ďalej $|\sphericalangle BEA| = 180^\circ - |\sphericalangle BEC| = 72^\circ$, a pretože trojuholník ABE je rovnoramenný ($|AB| = |BE|$), je $|\sphericalangle BAC| = 72^\circ$. Potom aj $|\sphericalangle ABC| = 72^\circ$, takže $|CA| = |CB|$. Keďže $|CE| = |CD|$, odčítaním dostaneme $|AE| = |CA| - |CE| = |CB| - |CD| = |BD| = |DE|$. Trojuholník AED je teda rovnoramenný a $|\sphericalangle AED| = 180^\circ - |\sphericalangle DEC| = 108^\circ$, čiže $|\sphericalangle EAD| = 36^\circ$. Platí teda $|\sphericalangle ACB| = 36^\circ$ a $|\sphericalangle BAD| = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. (74. ročník MO, úloha Z8-II-3.)

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Iveta Jančígová
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Marián Macko, Daniela Kovalčíková