
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z8

- 1** Klasická hracia kocka má na svojich stenách bodky v počtoch od 1 do 6 tak, že súčet bodiek na každých dvoch protiľahlých stenách je sedem.

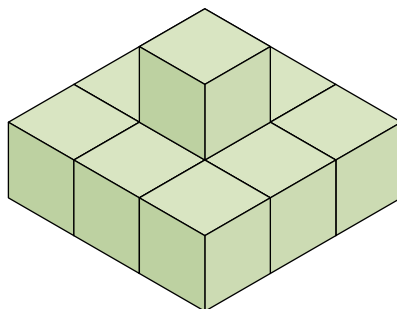
Tri kamarátky si rozdelili 24 rovnakých hracích kociek a každá zo svojich ôsmich kociek zlepila kváder (kocka je špeciálny typ kvádra). Žiadne dva z týchto troch kvádrov nemali rovnaké rozmery a každý bol zlepený tak, že celkový počet bodiek na jeho povrchu bol najväčší možný.

Každá z kamarátok spočítala bodky na povrchu svojho kvádra. Aké čísla mohli dostať?

(Marián Macko)

Rovnako ako v súťažnej úlohe, aj v týchto úlohách má hracia kocka na každej stene jednu až šesť bodiek a na každých dvoch protiľahlých stenách je súčet bodiek sedem.

- N1** Mirko k sebe zlepil dve hracie kocky celými stenami a získal tak kváder. Aký najväčší a aký najmenší počet bodiek mohol byť dokopy na stenách takto vzniknutého kvádra?
- N2** Jana zlepil štyri hracie kocky tak, že neboli všetky štyri za sebou v jednom smere a dokopy tvorili kváder. Aký najväčší a aký najmenší počet bodiek mohol byť na povrchu kvádra?
- N3** Radim skladal telesá vždy z 12 zhodných kociek tak, že kocky zlepoval k sebe celými stenami. Koľko rôznych kvádrov takto mohol vytvoriť? Kvádre, ktoré možno na seba previesť otočením, považujeme za rovnaké.
- D1** Janko má 100 hracích kociek, z ktorých skladal pyramídu so štvorcovou základňou. Každé poschodie pyramídy je štvorec a každé nižšie poschodie prečnieva na všetkých štyroch stranách presne o jednu kocku. Horné dve poschodia pyramídy sú na obrázku nižšie. Ako veľkú pyramídu mohol z kociek zložiť a koľko najviac bodiek mohlo byť na povrchu pyramídy? Bodky na spodku pyramídy nezapočítavame.



-
- 2** Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel (a, b) s týmito vlastnosťami:

- čísla a a b sú menšie ako 50,
- číslo $a \cdot b$ je deliteľné 17, ale číslo $a + b$ nie je deliteľné 17,
- číslo $a \cdot b$ je deliteľné 11, ale číslo $a + b$ nie je deliteľné 11,
- číslo $a \cdot b$ aj číslo $a + b$ sú deliteľné 2.

(Eva Semerádová)

- N1** Pre ktoré dve rôzne rôzne jednociferné nenulové prirodzené čísla a, b platí, že ich
- a) súčet je deliteľný siedmimi;
 - b) súčin je deliteľný siedmimi?
- N2** Z čísel 3, 5, 12, 25, 9, 17 vyberte všetky dvojice, ktorých
- a) súčin je deliteľný piatimi, ale súčet nie je deliteľný piatimi;
 - b) súčin a aj súčet sú deliteľné tromi.
- N3** Nájdite všetky dvojice rôznych dvojciferných čísel, ktorých súčin a aj súčet sú deliteľné číslom 19 a ktorých
- a) súčin je deliteľný dvoma;
 - b) súčet je deliteľný dvoma.

D1 Vyslovte pravidlo, kedy pre dve rôzne prirodzené čísla a, b platí, že ich

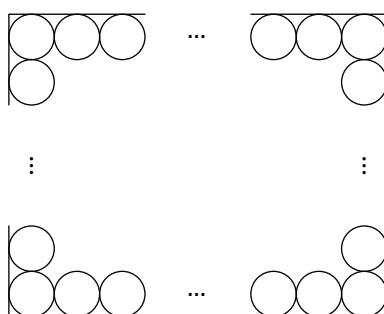
- a) súčin je deliteľný číslom 11;
- b) súčet je deliteľný číslom 7;
- c) súčin je deliteľný číslom 6.

D2 Tomáš si myslel trojciferné číslo zložené z troch rôznych nenulových číslic takých, že ich súčin a aj súčet boli deliteľné tromi. Koľko takých trojciferných čísel existuje?

3 Máme 56 kruhových žetónov s polomerom 4 cm. Sú uložené po obvode stola v tvare obdĺžnika tak, že platí:

- každej strany stola sa dotýka nejaký žetón,
- rohové žetóny sa dotýkajú dvoch strán stola,
- ostatné žetóny sa dotýkajú jednej strany stola,
- susedné žetóny sa dotýkajú navzájom.

Na druhý stôl rovnakých rozmerov začneme ukladať kruhové žetóny s polomerom 3 cm a dodržíme pritom všetky podmienky ako pri prvom stole. Po uložení žetónov pozdĺž celej jednej strany sa ukázalo, že sme použili o 6 žetónov viac ako pozdĺž rovnako dlhej strany na prvom stole.

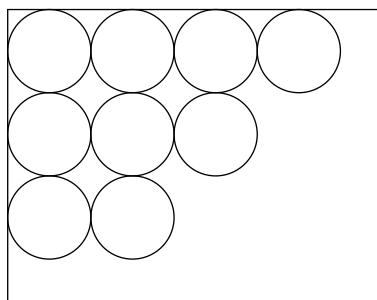


Zistite rozmery stola.

(Marián Macko)

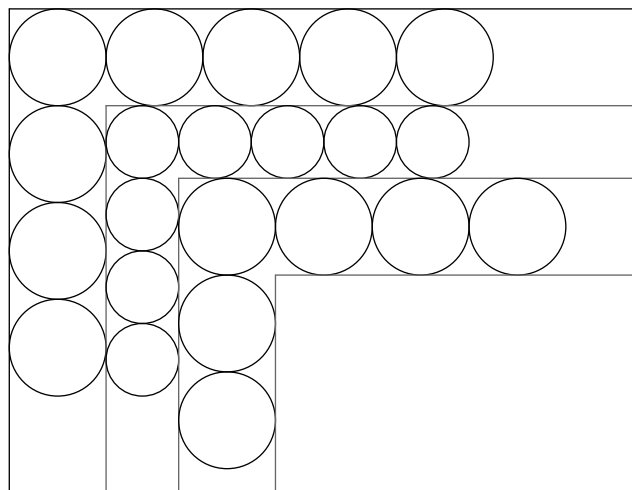
N1 Koľko etikiet s priemerom 4 cm môžeme poskladať pozdĺž štyroch strán dosky obdĺžnikového stola s rozmermi 120 cm $\times$ 100 cm tak ako v súťažnej úlohe?

N2 Iva pripravuje občerstvenie na športový deň a zistila, že ak všetkých 45 pohárikov s limonádou vyskladá na obdĺžnikový stôl s rozmermi 60 cm $\times$ 108 cm tak, ako je to naznačené na obrázku, zaplní nimi úplne celý stôl. Aký priemer má jeden pohárik?



N3 Boris sa rozhodol ohraničiť kúsok cesty polienkami, ktoré skladal tesne k sebe. Na jednu stranu použil polienka s priemerom 18 centimetrov, na druhú stranu polienka s priemerom 12 centimetrov. Aký dlhý bol ohraničený úsek, ak malých polienok použil o 11 viac než veľkých?

D1 Richard skladal na stolík etikety podobne ako v súťažnej úlohe. Skladal ich však iba k dvom susedným stranám stolíka, a to tak, že najskôr začal s etiketami s priemerom 4 cm, potom narysoval ceruzkou tesne okolo etikiet dve úsečky rovnobežné s hranami stola a pozdĺž nich potom skladal etikety s priemerom 3 cm. Ďalej pokračoval rovnakým spôsobom opäť s väčšími etiketami tak, ako je naznačené na obrázku a etiketu položil, len ak sa na stôl vošla celá (nevyplnená časť na okraji stola mu mohla ostať). Koľko veľkých etikiet použil, ak pokračoval, až kým sa ďalšia veľká etiketa na stolík nezместila a stolík mal rozmery 80 cm $\times$ 40 cm?



- 4 V prvom ročníku istej školy sú dve triedy – 1. A a 1. B. V 1. A je o polovicu viac chlapcov ako v 1. B, o štvrtinu viac dievčat ako v 1. B a celkovo o tretinu viac žiakov ako v 1. B.

Akú časť všetkých žiakov prvého ročníka tvoria dievčatá?

(Josef Tkadlec)

- N1** Zita a Dita sa dohodli, že cez víkend budú veľa športovať. Zita prešla počas víkendu na bicykli rovnakú vzdialenosť ako na kolieskových korčuliach, dokopy prešla 72 kilometrov. Dita prešla na bicykli o štvrtinu väčšiu vzdialenosť než Zita, na kolieskových korčuliach však prešla o dve tretiny menšiu vzdialenosť než Zita. Koľko kilometrov prekonala počas víkendu Dita na bicykli a kolieskových korčuliach dokopy?
- N2** V ôsmom ročníku sú dve triedy, 8. A a 8. B, v každej z nich je 24 žiakov. V 8. A je však o polovicu viac chlapcov než v 8. B. Akú veľkú časť ročníka tvoria chlapci, ak v 8. B tvoria tretinu triedy?
- N3** Karol, Kubo a Krištof trhali čerešne. Karol natrhal o štvrtinu viac než Kubo, Krištof o tretinu menej než Karol. Koľko kilogramov čerešní natrhal Karol, ak dokopy natrhali 37 kilogramov čerešní?
- D1** Včera nadojili na farme Doj dvakrát viac mlieka než na farme Hoj a na farme Joj dvakrát viac mlieka než na farme Doj. Každá farma poslala časť nadojeného mlieka na spracovanie na maslo. Farma Doj poslala na výrobu masla $\frac{7}{8}$ svojho mlieka, farma Hoj $\frac{3}{4}$ svojho mlieka. Z mlieka nadojeného na všetkých troch farmách dokopy šlo na výrobu masla 90 %. Akú časť svojho mlieka poslala na výrobu masla farma Joj?

- 5 Hugo, Mikuláš a Vojto si vytýčili cyklokrosový okruh. Hugo odštartoval preteky Mikuláša a Vojta na 12 okruhov. Keď Mikuláš prvýkrát prechádzal okolo Huga, Hugo sa vydal v protismere oproti Vojtovi, ktorý zaostával. Kým Hugo prvýkrát stretol Vojta, prešiel 150 metrov. V tom okamihu mal Vojto prejdenú štrnástinu celkovej dĺžky pretekov.

Koľko metrov meral jeden okruh?

(Lenka Dedková)

- N1** Eliška sa rozhodla, že dvakrát obehne školu. Spolu s Dávidom odštartovali pred hlavným vchodom, ale opačným smerom. Eliška stretla Dávida po 100 metroch svojho behu a Dávid jej povedal, že na splnenie jej cieľa musí ešte dvakrát prebehnúť tú istú vzdialenosť. Ako ďaleko od hlavného vchodu bola Eliška, keď stretla Dávida?
- N2** Marek, Eva a Jakub sa dohodli, že sa popoludní stretnú v parku. Marek a Eva dorazili včas, Jakub mal ale veľké meškanie. Marek a Eva sa rozhodli, že čakanie na Jakuba budú tráviť obchádzaním parku. Marek park obchádzal po vonkajšom okraji, Eva obchádzala menší okruh okolo centrálného kvetinového záhona. Markov okruh meral 1,2 kilometra a stihol ho obísť presne trikrát. Eva medzitým rovnakým tempom obišla svoj okruh presne osemkrát. Aký dlhý bol okruh okolo kvetinového záhona?
- N3** Natálka pletie svojim kamarátkam vence z púpav. Doobeda plietla veľké vence, každý zo 45 púpav a poobede malé vence, ktoré mali o 18 púpav menej ako veľké vence. Poobede uplietla o 10 vencov viac ako doobeda, pričom jej práca doobeda aj poobede trvala rovnako dlho. Koľko vencov dokopy uplietla, ak čas potrebný na upletenie venca bol priamo úmerný počtu púpav?
- D1** Pat a Mat si dali preteky v behu do svojej chalúčky. V istom okamihu platilo, že keby Mat mal zdolanú polovicu vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol, chýbal by mu do chalúčky trojnásobok tejto polovičnej vzdialenosti. V tom istom okamihu platilo, že keby Pat mal zdolaný dvojnásobok vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol, chýbala by mu do chalúčky tretina tejto dvojnásobnej vzdialenosti. Kto bol v danom okamihu bližšie k chalúčke?

6 Zvoľte si dva body X, Y , ktorých vzdialenosť je 4 cm. Potom zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby platilo:

- polomer kružnice opísanej trojuholníku BCD je 7 cm,
- bod X leží na uhlopriečke BD a bod Y leží na uhlopriečke AC ,
- body X a Y sú súmerné podľa osi rovnobežnej s priamkou AB .

Popíšte a zdôvodnite konštrukciu štvorca $ABCD$.

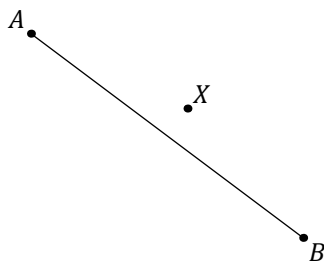
(Monika Janičová)

N1 Narysujte kružnicu opísanú trojuholníku:

- ABC , ktorého strana AB má dĺžku 6 centimetrov a obe zvyšné strany sú o tretinu kratšie;
- KLM , v ktorom všetky vnútorné uhly majú rovnakú veľkosť (stranu si zvoľte);
- PQR , v ktorom uhol pri vrchole P je pravý a strany PQ a PR majú dĺžku 4 cm.

N2 Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB . Na strane BC ležia dva rôzne body K, L a na strane AC ležia dva rôzne body M, N tak, že bod K je obrazom bodu M v osovej súmernosti podľa osi o a bod L je obrazom bodu N v osovej súmernosti podľa tej istej osi o . Načrtnite, kade prechádza os o .

D1 Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ak je daná jeho strana AB a bod X , ktorý leží na priamke obsahujúcej niektorú uhlopriečku kosoštvorca. Nájdite všetky možnosti.



D2 Je daný štvoruholník $ABCD$, pričom bod D leží na osi úsečky BC a vzdialenosť bodu A od priamky CD je rovnaká ako vzdialenosť bodu C od priamky AD . Dokážte, že štvoruholníku $ABCD$ sa nedá opísať kružnica.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z8

- 1 Klasická hracia kocka má na svojich stenách bodky v počtoch od 1 do 6 tak, že súčet bodiek na každých dvoch protilahlých stenách je sedem.

Tri kamarátky si rozdelili 24 rovnakých hracích kociek a každá zo svojich ôsmich kociek zlepiť kváder (kocka je špeciálny typ kvádra). Žiadne dva z týchto troch kvádrov nemali rovnaké rozmery a každý bol zlepený tak, že celkový počet bodiek na jeho povrchu bol najväčší možný.

Každá z kamarátok spočítala bodky na povrchu svojho kvádra. Aké čísla mohli dostať?

(Marián Macko)

Rovnako ako v súťažnej úlohe, aj v týchto úlohách má hracia kocka na každej stene jednu až šesť bodiek a na každých dvoch protilahlých stenách je súčet bodiek sedem.

- N1 Mirko k sebe zlepil dve hracie kocky celými stenami a získal tak kváder. Aký najväčší a aký najmenší počet bodiek mohol byť dokopy na stenách takto vzniknutého kvádra?

Riešenie:

Na zlepených stenách mohlo byť najmenej 2 a najviac 12 bodiek. Súčet všetkých bodiek na dvoch kockách je 42, na povrchu kvádra teda mohlo byť najviac 40 a najmenej 30 bodiek.

- N2 Jana zlepiť štyri hracie kocky tak, že neboli všetky štyri za sebou v jednom smere a dokopy tvorili kváder. Aký najväčší a aký najmenší počet bodiek mohol byť na povrchu kvádra?

Riešenie:

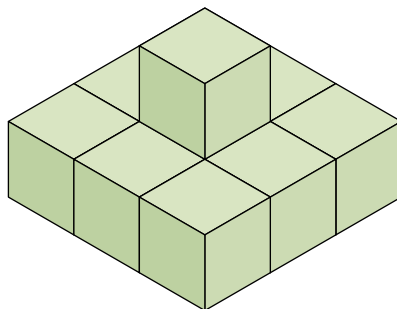
Zlepené kocky vytvorili pravidelný štvorboký hranol s podstavou hranou dvakrát dlhšou, než je jeho výška. Na protilahlých stenách hracej kocky je vždy dokopy 7 bodiek, preto súčet bodiek na oboch štvorcových stenách kvádra musí byť $7 \cdot 4 = 28$. Každá kocka má okrem dvoch stien tvoriacich štvorcové steny kvádra ešte ďalšie dve viditeľné steny. Na nich môžu byť najmenej 3 bodky ($1 + 2$) a najviac 11 bodiek ($5 + 6$). Na povrchu celého kvádra teda mohlo byť najviac 72 bodiek ($28 + 4 \cdot 11$) a najmenej 40 bodiek ($28 + 4 \cdot 3$). Úlohu možno riešiť aj z opačnej strany. Z každej kocky nebudú vidieť dve susedné steny, najväčší počet bodiek na nich je $5 + 6 = 11$, najmenší potom $1 + 2 = 3$. Teda maximálny počet bodiek na povrchu kvádra je $4 \cdot (3 \cdot 7 - 3) = 72$, najmenší potom $4 \cdot (3 \cdot 7 - 11) = 40$.

- N3 Radim skladal telesá vždy z 12 zhodných kociek tak, že kocky zlepoval k sebe celými stenami. Koľko rôznych kvádrov takto mohol vytvoriť? Kvádre, ktoré možno na seba previesť otočením, považujeme za rovnaké.

Riešenie:

Kocky je možné zlepiť k sebe v rade (kváder $12 \times 1 \times 1$), v dvoch radoch (kváder $6 \times 2 \times 1$), v troch radoch (kváder $4 \times 3 \times 1$) a v dvoch radoch a dvoch vrstvách (kváder $3 \times 2 \times 2$). Radim teda mohol vytvoriť 4 rôzne kvádre.

- D1 Janko má 100 hracích kociek, z ktorých skladal pyramídu so štvorcovou základňou. Každé poschodie pyramídy je štvorec a každé nižšie poschodie prečnieva na všetkých štyroch stranách presne o jednu kocku. Horné dve poschodia pyramídy sú na obrázku nižšie. Ako veľkú pyramídu mohol z kociek zložiť a koľko najviac bodiek mohlo byť na povrchu pyramídy? Bodky na spodku pyramídy nezapočítavame.



Riešenie:

Pyramída mohla mať štyri vrstvy, počet kociek v jednotlivých vrstvách je 1, 9, 25 a 49, a Jankovi zostalo 16 nevyužitých kociek. Horná kocka má viditeľné všetky steny až na jednu, najviac teda môže mať viditeľných 20 bodiek. V ďalších vrstvách majú niektoré kocky (rohové kocky každej vrstvy) tri viditeľné steny (najviac

15 bodiek), takých kociek je v pyramíde 12. Ostatné okrajové kocky vrstiev majú dve viditeľné steny (najviac 11 bodiek), takých je 36. Zvyšných 35 kociek vo vnútri vrstiev nemá viditeľnú žiadnu stenu. Dokopy môže byť na povrchu pyramídy $20 + 12 \cdot 15 + 36 \cdot 11 = 596$ viditeľných bodiek.

2 Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel (a, b) s týmito vlastnosťami:

- čísla a aj b sú menšie ako 50,
- číslo $a \cdot b$ je deliteľné 17, ale číslo $a + b$ nie je deliteľné 17,
- číslo $a \cdot b$ je deliteľné 11, ale číslo $a + b$ nie je deliteľné 11,
- číslo $a \cdot b$ aj číslo $a + b$ sú deliteľné 2.

(Eva Semerádová)

N1 Pre ktoré dve rôzne jednociferné nenulové prirodzené čísla a, b platí, že ich

- súčet je deliteľný siedmimi;
- súčin je deliteľný siedmimi?

Riešenie:

Ak má byť súčet deliteľný siedmimi, musí byť buď 7, alebo 14. Vyhovujúce dvojice sú $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(6, 8)$ a $(5, 9)$. Variant (a) má teda celkom 10 riešení, rozlišujeme totiž prípady, keď je menšie z čísel číslo a a keď číslo b . Ak má byť súčin deliteľný siedmimi, musí byť aspoň jedno z čísel deliteľné siedmimi – to v danom rozmedzí spĺňa iba číslo 7. Riešením variantu (b) sú teda všetky dvojice čísel, v ktorých sa vyskytuje číslo 7. Pri rozlíšení čísel a, b dostávame dokopy 16 riešení.

N2 Z čísel 3, 5, 12, 25, 9, 17 vyberte všetky dvojice, ktorých

- súčin je deliteľný piatimi, ale súčet nie je deliteľný piatimi;
- súčin a aj súčet sú deliteľné tromi.

Riešenie:

Vybrané dvojice čísel sú vo variante (a) $(5, 3)$, $(5, 12)$, $(5, 9)$, $(5, 17)$, $(25, 3)$, $(25, 12)$, $(25, 9)$, $(25, 17)$, vo variante (b) $(3, 9)$, $(3, 12)$, $(9, 12)$.

N3 Nájdite všetky dvojice rôznych dvojciferných čísel, ktorých súčin a aj súčet sú deliteľné číslom 19 a ktorých

- súčin je deliteľný dvoma;
- súčet je deliteľný dvoma.

Riešenie:

Musíme vybrať z dvojciferných násobkov 19, teda z čísel 19, 38, 57, 76, 95. Vo variante (a) potrebujeme vo dvojici aspoň jedno párne číslo (dvojice $(38, 19)$, $(38, 57)$, $(38, 76)$, $(38, 95)$, $(76, 19)$, $(76, 57)$, $(76, 95)$), vo variante (b) obe čísla párne alebo obe nepárne (dvojice $(38, 76)$, $(19, 57)$, $(19, 95)$, $(57, 95)$).

D1 Vyslovte pravidlo, kedy pre dve rôzne prirodzené čísla a, b platí, že ich

- súčin je deliteľný číslom 11;
- súčet je deliteľný číslom 7;
- súčin je deliteľný číslom 6.

Riešenie:

Súčin $a \cdot b$ je deliteľný číslom 11 práve vtedy, keď je aspoň jedno z čísel a, b deliteľné jedenástimi. Súčet $a + b$ je deliteľný číslom 7 práve vtedy, keď zvyšky čísel a, b po delení siedmimi dávajú v súčte číslo deliteľné siedmimi (v tomto prípade 0, alebo 7). Súčin $a \cdot b$ je deliteľný číslom 6 práve vtedy, keď je aspoň jedno z čísel a, b deliteľné 2 a aspoň jedno deliteľné 3.

D2 Tomáš si myslel trojciferné číslo zložené z troch rôznych nenulových číslic takých, že ich súčin a aj súčet boli deliteľné tromi. Koľko takých trojciferných čísel existuje?

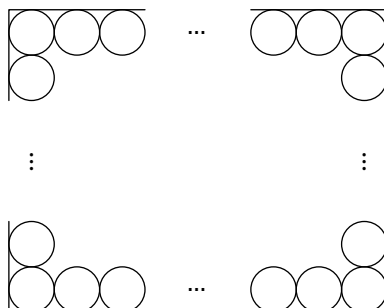
Riešenie:

Aby bol súčin deliteľný tromi, musí byť aspoň jedno z troch použitých čísel deliteľné tromi. Aby bol súčet deliteľný tromi, musia byť buď všetky tri čísla deliteľné tromi (usporadúvame číslice 3, 6, 9), alebo jedno deliteľné tromi (vyberáme z 3, 6, 9), jedno dávať zvyšok 1 po delení tromi (vyberáme z 1, 4, 7) a jedno dávať zvyšok 2 po delení tromi (vyberáme z 2, 5, 8). V prvom prípade máme 6 možností (umiestnenie číslic) a v druhom $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ možností (umiestnenie a výber číslic). Spolu 168 možností.

3 Máme 56 kruhových žetónov s polomerom 4 cm. Sú uložené po obvode stola v tvare obdĺžnika tak, že platí:

- každej strane stola sa dotýka nejaký žetón,
- rohové žetóny sa dotýkajú dvoch strán stola,
- ostatné žetóny sa dotýkajú jednej strany stola,
- susedné žetóny sa dotýkajú navzájom.

Na druhý stôl rovnakých rozmerov začneme ukladať kruhové žetóny s polomerom 3 cm a dodržíme pritom všetky podmienky ako pri prvom stole. Po uložení žetónov pozdĺž celej jednej strany sa ukázalo, že sme použili o 6 žetónov viac ako pozdĺž rovnako dlhej strany na prvom stole.



Zistite rozmery stola.

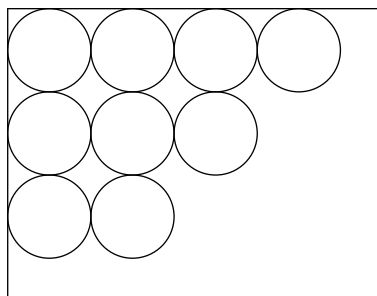
(Marián Macko)

- N1** Koľko etikiet s priemerom 4 cm môžeme poskladať pozdĺž štyroch strán dosky obdĺžnikového stola s rozmermi 120 cm $\times$ 100 cm tak ako v súťažnej úlohe?

Riešenie:

Pozdĺž dlhšej strany stola môžeme poskladať 30 etikiet, pozdĺž kratšej strany stola 25 etikiet. Dokopy sa takto na stôl zmestí $2 \cdot 30 + 2 \cdot 25 - 4 = 106$ etikiet (rohové etikety musíme započítať iba raz).

- N2** Iva pripravuje občerstvenie na športový deň a zistila, že ak všetkých 45 pohárikov s limonádou vyskladá na obdĺžnikový stôl s rozmermi 60 cm $\times$ 108 cm tak, ako je to naznačené na obrázku, zaplní nimi úplne celý stôl. Aký priemer má jeden pohárik?



Riešenie:

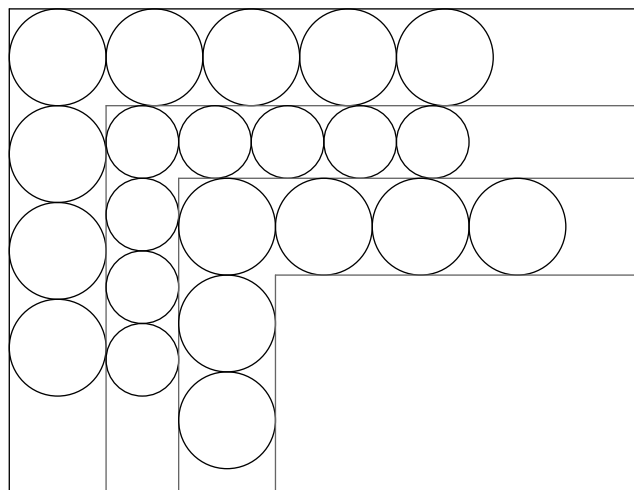
45 pohárikov vieme rozložiť ako $5 \cdot 9$ pohárikov, priemer potom v oboch prípadoch vychádza $60/5 = 12$ a $108/9 = 12$, takže priemer je 12 cm. (Pre usporiadanie pohárikov $3 \cdot 15$ alebo $1 \cdot 45$ by priemer nevyšiel rovnaký, teda by to neboli kruhové poháriky.)

- N3** Boris sa rozhodol ohraničiť kúsok cesty polienkami, ktoré skladal tesne k sebe. Na jednu stranu použil polienka s priemerom 18 centimetrov, na druhú stranu polienka s priemerom 12 centimetrov. Aký dlhý bol ohraničený úsek, ak malých polienok použil o 11 viac než veľkých?

Riešenie:

Na každé tri malé polienka pripadajú dve veľké polienka. Ak bolo malých polienok o 11 viac, muselo ich byť celkom 33, veľkých polienok potom 22. Dĺžka ohraničeného úseku bola $33 \cdot 12 = 22 \cdot 18 = 396$ cm.

- D1** Richard skladal na stolík etikety podobne ako v súťažnej úlohe. Skladal ich však iba k dvom susedným stranám stolíka, a to tak, že najskôr začal s etiketami s priemerom 4 cm, potom narysoval ceruzkou tesne okolo etikiet dve úsečky rovnobežné s hranami stola a pozdĺž nich potom skladal etikety s priemerom 3 cm. Ďalej pokračoval rovnakým spôsobom opäť s väčšími etiketami tak, ako je naznačené na obrázku a etiketu položil, len ak sa na stôl vošla celá (nevyplnená časť na okraji stola mu mohla ostať). Koľko veľkých etikiet použil, ak pokračoval, až kým sa ďalšia veľká etiketa na stolík nezmestila a stolík mal rozmery 80 cm $\times$ 40 cm?



Riešenie:

Pri hrane stola Richard vyskladal $20 + 10 - 1 = 29$ etikiet. Po každom skladaní sa voľná časť stolíka zmenší na každej strane o priemer práve použitých etikiet, teda pri každom druhom skladaní veľkých etikiet sa každá strana zmenší o 7 centimetrov. Postupne tak dostávame rozmery voľnej časti 80×40 , 73×33 , 66×26 , 59×19 , 52×12 , 45×5 a k nim počty veľkých etikiet 29, 25, 21, 17, 15 a 11. Ďalšia veľká etiketa sa už nezmestí. Dokopy teda umiestnil $29 + 25 + 21 + 17 + 15 + 11 = 118$ veľkých etikiet.

- 4 V prvom ročníku istej školy sú dve triedy – 1. A a 1. B. V 1. A je o polovicu viac chlapcov ako v 1. B, o štvrtinu viac dievčat ako v 1. B a celkovo o tretinu viac žiakov ako v 1. B.

Akú časť všetkých žiakov prvého ročníka tvoria dievčatá?

(Josef Tkadlec)

- N1 Zita a Dita sa dohodli, že cez víkend budú veľa športovať. Zita prešla počas víkendu na bicykli rovnakú vzdialenosť ako na kolieskových korčuliach, dokopy prešla 72 kilometrov. Dita prešla na bicykli o štvrtinu väčšiu vzdialenosť než Zita, na kolieskových korčuliach však prešla o dve tretiny menšiu vzdialenosť než Zita. Koľko kilometrov prekonala počas víkendu Dita na bicykli a kolieskových korčuliach dokopy?

Riešenie:

Zita prešla na bicykli 36 kilometrov, Dita teda prešla 45 kilometrov. Zita prešla na kolieskových korčuliach 36 kilometrov, Dita iba 12 kilometrov. Dokopy Dita počas víkendu prešla 57 kilometrov.

- N2 V ôsmom ročníku sú dve triedy, 8. A a 8. B, v každej z nich je 24 žiakov. V 8. A je však o polovicu viac chlapcov než v 8. B. Akú veľkú časť ročníka tvoria chlapci, ak v 8. B tvoria tretinu triedy?

Riešenie:

V 8. B je 8 chlapcov, v 8. A ich je teda 12. Dokopy je v 8. ročníku 20 chlapcov zo 48 žiakov, čo je $\frac{5}{12}$ ročníka.

- N3 Karol, Kubo a Krištof trhali čerešne. Karol natrhal o štvrtinu viac než Kubo, Krištof o tretinu menej než Karol. Koľko kilogramov čerešní natrhal Karol, ak dokopy natrhali 37 kilogramov čerešní?

Riešenie:

Úlohu možno riešiť pomocou rovníc, ale tiež ju možno dobre znázorniť úsečkami rôznej dĺžky. Karol natrhal 15 kg čerešní, Kubo 12 kg čerešní a Krištof 10 kg čerešní.

- D1 Včera nadojili na farme Doj dvakrát viac mlieka než na farme Hoj a na farme Joj dvakrát viac mlieka než na farme Doj. Každá farma poslala časť nadojeného mlieka na spracovanie na maslo. Farma Doj poslala na výrobu masla $\frac{7}{8}$ svojho mlieka, farma Hoj $\frac{3}{4}$ svojho mlieka. Z mlieka nadojeného na všetkých troch farmách dokopy šlo na výrobu masla 90 %. Akú časť svojho mlieka poslala na výrobu masla farma Joj?

Riešenie:

Množstvá nadojeného mlieka sú v pomere Hoj : Doj : Joj = 1 : 2 : 4, môžeme teda počítať napríklad so 40, 80 a 160 litrami, dokopy s 280 litrami. Na maslo šlo 90 % z 280 litrov, čiže 252 litrov. Farma Doj z toho dodala $\frac{7}{8}$ z 80 litrov, teda 70 litrov, farma Hoj $\frac{3}{4}$ zo 40 litrov, teda 30 litrov. Na farmu Joj tak zostáva $252 - 70 - 30 = 152$ litrov zo 160 nadojených, čo je $\frac{19}{20}$, teda 95 % jej mlieka.

(74. ročník MO, úloha Z9-II-3.)

- 5 Hugo, Mikuláš a Vojto si vytýčili cyklokrosový okruh. Hugo odštartoval preteky Mikuláša a Vojta na 12 okruhov.

Keď Mikuláš prvýkrát prechádzal okolo Huga, Hugo sa vydal v protismere oproti Vojtovi, ktorý zaostával. Kým Hugo prvýkrát stretol Vojtu, prešiel 150 metrov. V tom okamihu mal Vojto prejdenu štrnástinu celkovej dĺžky pretekov.

Koľko metrov meral jeden okruh?

(Lenka Dedková)

- N1** Eliška sa rozhodla, že dvakrát obehne školu. Spolu s Dávidom odštartovali pred hlavným vchodom, ale opačným smerom. Eliška stretla Dávida po 100 metroch svojho behu a Dávid jej povedal, že na splnenie jej cieľa musí ešte dvakrát prebehnúť tú istú vzdialenosť. Ako ďaleko od hlavného vchodu bola Eliška, keď stretla Dávida?

Riešenie:

Ak musela Eliška ubehnúť ešte dvakrát tú istú vzdialenosť, bola práve v tretine cesty. Celé dva okruhy sú preto dlhé 300 metrov, jeden okruh meria 150 metrov. Pretože v okamihu stretnutia mala Eliška za sebou 100 metrov, stretli sa 50 metrov od hlavného vchodu.

- N2** Marek, Eva a Jakub sa dohodli, že sa popoludní stretnú v parku. Marek a Eva dorazili včas, Jakub mal ale veľké meškanie. Marek a Eva sa rozhodli, že čakanie na Jakuba budú tráviť obchádzaním parku. Marek park obchádzal po vonkajšom okraji, Eva obchádzala menší okruh okolo centrálného kvetinového záhona. Markov okruh meral 1,2 kilometra a stihol ho obísť presne trikrát. Eva medzitým rovnakým tempom obišla svoj okruh presne osemkrát. Aký dlhý bol okruh okolo kvetinového záhona?

Riešenie:

Marek prešiel dokopy 3,6 kilometra, rovnako ako Eva. Evin okruh bol dlhý $3,6 : 8 = 0,45$ kilometra, teda 450 metrov.

- N3** Natálka pletie svojim kamarátkam vence z púpav. Doobeda plietla veľké vence, každý zo 45 púpav a poobede malé vence, ktoré mali o 18 púpav menej ako veľké vence. Poobede uplietla o 10 vencov viac ako doobeda, pričom jej práca doobeda aj poobede trvala rovnako dlho. Koľko vencov dokopy uplietla, ak čas potrebný na upletenie venca bol priamo úmerný počtu púpav?

Riešenie:

Každý veľký veniec bol upletený zo 45 púpav, každý malý z 27 púpav. Prepočítajme prácu Natálky na počet púpav, ktoré dokopy zaplietla; ten musí byť doobeda aj poobede rovnaký. Ak označíme počet veľkých vencov v , platí $45v = 27(v + 10)$, odkiaľ $18v = 270$ a $v = 15$. Veľkých vencov bolo teda 15 ($15 \cdot 45 = 675$) a malých vencov 25 ($25 \cdot 27 = 675$). Dokopy uplietla 40 vencov.

- D1** Pat a Mat si dali preteky v behu do svojej chalúčky. V istom okamihu platilo, že keby Mat mal zdolanú polovicu vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol, chýbal by mu do chalúčky trojnásobok tejto polovičnej vzdialenosti. V tom istom okamihu platilo, že keby Pat mal zdolaný dvojnásobok vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol, chýbala by mu do chalúčky tretina tejto dvojnásobnej vzdialenosti. Kto bol v danom okamihu bližšie k chalúčke?

Riešenie:

Ak by Matovi do chalúčky chýbal trojnásobok ubehnutej vzdialenosti, tak by bol v štvrtine. Tento prípad by nastal, keby mal zdolanú polovicu vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol. Teda Mat sa v danom okamihu nachádzal v polovici medzi štartom a chalúpkou. Ak by Patovi do chalúčky chýbala tretina ubehnutej vzdialenosti, tak by bol v troch štvrtinách. Tento prípad by nastal, keby mal zdolaný dvojnásobok vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol. Teda Pat sa v danom okamihu nachádzal v troch osminách medzi štartom a chalúpkou. V danom okamihu bol bližšie k chalúčke Mat.

(73. ročník MO, úloha Z9-I-1.)

-
- 6** Zvoľte si dva body X, Y , ktorých vzdialenosť je 4 cm. Potom zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby platilo:

- polomer kružnice opísanej trojuholníku BCD je 7 cm,
- bod X leží na uhlopriečke BD a bod Y leží na uhlopriečke AC ,
- body X a Y sú súmerné podľa osi rovnobežnej s priamkou AB .

Popíšte a zdôvodnite konštrukciu štvorca $ABCD$.

(Monika Janičová)

- N1** Narysujte kružnicu opísanú trojuholníku:

- ABC , ktorého strana AB má dĺžku 6 centimetrov a obe zvyšné strany sú o tretinu kratšie;
- KLM , v ktorom všetky vnútorné uhly majú rovnakú veľkosť (stranu si zvoľte);
- PQR , v ktorom uhol pri vrchole P je pravý a strany PQ a PR majú dĺžku 4 cm.

Riešenie:

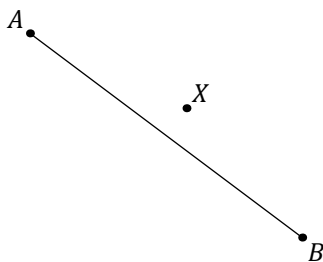
Stred opísanej kružnice nájdeme ako priesečník osí jednotlivých strán trojuholníka. Vo variante (a) ide o rovnoramenný trojuholník, stred leží na priamke obsahujúcej výšku z vrcholu C , ktorá je zároveň osou strany AB ; keďže uhol pri C je tupý, stred leží mimo trojuholníka. Vo variante (b) sa stred nachádza v ortocentre, keďže KLM je rovnostranný trojuholník. Vo variante (c) je trojuholník rovnoramenný a pravouhlý, stred opísanej kružnice leží v strede strany QR .

- N2** Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB . Na strane BC ležia dva rôzne body K, L a na strane AC ležia dva rôzne body M, N tak, že bod K je obrazom bodu M v osovej súmernosti podľa osi o a bod L je obrazom bodu N v osovej súmernosti podľa tej istej osi o . Načrtnite, kde prechádza os o .

Riešenie:

Os o musí byť totožná s výškou na stranu AB , pretože ak sú súmerné dva body, budú súmerné aj celé priamky, na ktorých tieto dva body ležia. Ramená rovnoramenného trojuholníka sú súmerné podľa osi základne AB .

- D1** Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ak je daná jeho strana AB a bod X , ktorý leží na priamke obsahujúcej niektorú uhlopriečku kosoštvorca. Nájdite všetky možnosti.

**Riešenie:**

Bod X leží na priamke AC alebo na priamke BD . Ak leží na AC , vrchol C leží na priamke AX a zároveň na kružnici $k(B, |AB|)$, lebo $|BC| = |AB|$. Priamka AX pretína túto kružnicu v bode A a v ďalšom bode, ktorý je hľadaným vrcholom C . Vrchol D dostaneme doplnením na rovnobežník $ABCD$. Ak X leží na BD , vrchol D je druhý priesečník priamky BX s kružnicou $k(A, |AB|)$. Úloha má dve riešenia.

- D2** Je daný štvoruholník $ABCD$, pričom bod D leží na osi úsečky BC a vzdialenosť bodu A od priamky CD je rovnaká ako vzdialenosť bodu C od priamky AD . Dokážte, že štvoruholníku $ABCD$ sa nedá opísať kružnica.

Riešenie:

Vzdialenosť bodu A od priamky CD označme v_A , vzdialenosť bodu C od priamky AD označme v_C ; podľa zadania je $v_A = v_C$. Obsah trojuholníka ACD vieme vyjadriť so základňou CD aj so základňou AD , teda $\frac{1}{2}|CD| \cdot v_A = \frac{1}{2}|AD| \cdot v_C$, a preto $|AD| = |CD|$. Bod D navyše leží na osi úsečky BC , čiže $|DB| = |DC|$. Bod D je teda rovnako vzdialený od vrcholov A, B aj C , je to stred kružnice opísanej trojuholníku ABC . Kružnica opísaná štvoruholníku $ABCD$ by musela byť kružnicou opísanou aj trojuholníku ABC . Tá však bodom D neprechádza, lebo D je jej stred a jej polomer je kladný. Štvoruholníku $ABCD$ sa preto kružnica opísať nedá. (75. ročník MO, úloha Z9-III-4.)

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Iveta Jančígová
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Marián Macko, Daniela Kovalčíková