
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z7

- 1** Je daný štvorec, ktorý je zložený z 52 neprekrývajúcich sa menších štvorčekov. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zvyšný štvorček má dĺžku strany v centimetroch vyjadrenú prirodzeným číslom.

Aký obsah môže mať daný štvorec? Určte všetky možnosti.

(Erika Novotná)

- N1** Miška mala v krabici dieliky skladačky, celkom 8 štvorcov so stranou 1 cm a 5 štvorcov so stranou 2 cm. Vždy si vzala niekoľko dielikov (aj jeden) a zostavila z nich štvorec. Aký obsah mohli mať zostavené štvorce? Nájdite všetky možnosti.
- N2** Máme obdĺžnikové dieliky s rozmermi 3 cm a 5 cm. Z niekoľkých takých dielikov zostavíme štvorec. Aký môže byť jeho najmenší obsah?
- N3** Máme obdĺžnikové dieliky s rozmermi 4 cm a 6 cm. Z niekoľkých takých dielikov zostavíme štvorec. Aký môže byť jeho najmenší obsah?
- D1** Máme k dispozícii päť štvorcových dielikov so stranou 1 cm, jeden štvorcový dielik so stranou 2 cm a jeden štvorcový dielik so stranou 3 cm. Koľkými spôsobmi môžeme zo všetkých týchto dielikov poskladať obdĺžnik? Záleží iba na polohe štvorcových dielikov v obdĺžniku. Dve poskladania budeme považovať za rovnaké, ak sa dajú na seba previesť otočením celých týchto poskladaní.

-
- 2** V štyroch zásuvkách bolo spolu 62 guľôčok. Postupne sme do niektorých zásuviek presúvali guľôčky z ostatných troch zásuviek, a to zo všetkých rovnako:

- najprv po šesť guľôčok do tretej zásuvky,
- potom po tri guľôčky do druhej zásuvky,
- potom po jednej guľôčke do prvej zásuvky.

Nakoniec bolo v druhej zásuvke o päť guľôčok viac ako v prvej, v tretej o päť viac ako v druhej a vo štvrtej o päť viac ako v tretej.

Koľko guľôčok bolo v jednotlivých zásuvkách pred presúvaním?

(Vojtech Dedek)

- N1** V každej z dvoch misiek bolo 15 guľôčok. Koľko guľôčok musíme preložiť z prvej misky, aby:
- a) ich v druhej miske bolo o 8 viac než v prvej miske;
 - b) ich v druhej miske bolo o 9 viac než v prvej miske;
 - c) ich v druhej miske bolo 4-krát viac než v prvej miske?
- N2** Máme tri misky a v nich guľôčky. V prvej miske je o 7 guľôčok menej než v druhej miske. V druhej miske je o polovicu viac guľôčok než v tretej miske. V tretej miske je 60 guľôčok. Koľko guľôčok je v prvej miske?
- N3** V dvoch miskách bol rovnaký počet guľôčok. Keď sme z prvej misky preložili 4 guľôčky do druhej misky, bolo v druhej miske trikrát toľko guľôčok ako v prvej miske. Koľko guľôčok bolo pôvodne v prvej miske?
- D1** V každej zo štyroch misiek máme rovnaký počet guľôčok. Z prvej misky presunieme polovicu guľôčok do štvrtej misky a z druhej misky presunieme dve guľôčky do tretej misky. Teraz je v každej nasledujúcej miske o rovnaký počet guľôčok viac než v predchádzajúcej miske. Koľko guľôčok dohromady bolo vo všetkých miskách?
- D2** Snehulienka dala každému zo siedmich trpaslíkov rovnaký počet guľôčok. Trpaslíci hádzali hracou kockou. Koľko bodiek im padlo, toľko guľôčok museli vrátiť Snehulienke. Každému zo šiestich trpaslíkov padol iný počet bodiek. Koľko bodiek padlo siedmemu trpaslíkovi, keď trpaslíkom zostalo dokopy 46 guľôčok? Koľko guľôčok dala Snehulienka každému trpaslíkovi na začiatku?

-
- 3** Ciferník čarodejných hodín má zvyčajný tvar kruhu, ale nezvyčajný počet hodín. Čísla hodín sú rovnomerne rozmiestnené po obvode kruhu, je ich viac ako 50 a menej ako 80. Oproti číslu 36 vzhľadom na stred ciferníka je číslo deliteľné piatimi.

Koľko hodín môžu mať čarodejné hodiny? Určte všetky možnosti.

(Marián Macko)

- N1** Uvažujme ciferník bežných ručičkových hodín (o dvanástich hodinách). Ktoré čísla zodpovedajú v stredovej súmernosti podľa stredu ciferníka číslam, ktoré sú násobkom piatich?
- N2** Ktoré čísla by zodpovedali v stredovej súmernosti číslu 36, keby mali čarodejné hodiny práve
- a) 40 hodín;
 - b) 41 hodín;
 - c) 42 hodín?
- N3** Koľko hodín by mali čarodejné hodiny, keby bolo 36 napísané
- a) najviac napravo na ciferníku (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 3);
 - b) najviac naľavo na ciferníku (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 9);
 - c) ako druhé číslo vpravo od čísla najnižšie (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 6) na ciferníku;
 - d) ako druhé číslo vľavo od čísla najvyššie (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 12) na ciferníku?
- (Najväčšie číslo na ciferníku stojí na ňom najvyššie, vpravo od neho je 1, potom 2 atď.)
- D1** Na ciferníku elfích hodín sú čísla 24 a 34 súmerné podľa zvislej osi prechádzajúcej stredom ciferníka a jeho najväčším číslom. Aké číslo je stredovo súmerné s číslom 15? (Najväčšie číslo na ciferníku stojí na ňom najvyššie, vpravo od neho je 1, potom 2 atď.)

4 Anna a Zuzana bývajú na rovnakej ulici.

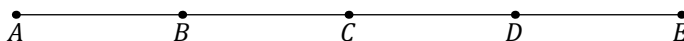
Raz sa súčasne vybrali oproti sebe zo svojich domovov, každá konštantnou rýchlosťou. Zuzana zistila, že si zabudla mobil, preto sa v osmine vzdialenosti medzi oboma domami otočila a vrátila sa domov. Tam jej mama ihneď podala mobil a Zuzana sa vzápätí vydala pôvodným smerom.

Keď sa dievčatá stretli, boli v polovici cesty medzi svojimi domami a od spoločného začiatku ich cesty uplynulo 15 minút.

Za aký čas by sa dievčatá stretli, keby sa Zuzana nevracala po mobil?

(Monika Janičová)

- N1** Z miesta A vedie do miesta B pešia cesta dlhá 12 km, z miesta B možno pokračovať do miesta C po ceste dlhej 24 km. Arnošt vyšiel z A , proti nemu šiel Ctirad z C . Stretli sa uprostred medzi miestami B a C . Ako ďaleko od C by sa stretli, keby Arnošt vyšiel z miesta B a obaja by šli rovnako rýchlo ako predtým?
- N2** Úsečka AE je bodmi B, C, D rozdelená na štyri rovnako dlhé úseky.



Mravec vyšiel z bodu A do bodu B , otočil sa a potom sa vrátil do A . Potom došiel do C , otočil sa a vrátil sa do A . Potom došiel do D , otočil sa a opäť sa vrátil do A . Nakoniec došiel do bodu E . Lienka šla rovno z bodu A do bodu E . Koľkokrát bola dráha lienky kratšia než dráha mravca?

- N3** Peter by za 5 minút prešiel na bicykli $\frac{1}{6}$ trasy. Keby šiel pešo, za 40 minút by prešiel $\frac{1}{4}$ tej istej trasy. Nakoniec vyrazil na bicykli, v polovici trasy dostal defekt, a tak zvyšok trasy prešiel pešo. Ako dlho mu trvalo prejsť celú trasu?
- N4** Korytnačky Žaneta a Žofia boli sestry a žili v jednom dome so záhradou. Žaneta potrebovala na prejdienie rovnakej dráhy o tretinu viac času než Žofia.
- a) Ak Žofia obišla záhradu za 3 hodiny, za ako dlho by ju obišla Žaneta?
 - b) Ak Žaneta obíde dom za 2 hodiny, za ako dlho by ho obišla Žofia?
 - c) Ak má Žaneta prejsť dráhu dvanásťkrát dlhšiu než Žofia, koľkokrát viac času bude potrebovať?

5 Nájdite všetky trojice cifier a, b, c tak, aby všetky dvojciferné čísla $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$ a trojciferné číslo $\overline{abc}$ boli deliteľné tromi.

(Patrik Bak)

- N1** Vyslovte kritérium deliteľnosti tromi. Ktoré z nasledujúcich čísel sú tromi deliteľné?

44, 555, 6 666, 789

- N2** Ktorú číslicu môžeme škrtnúť v čísle 45 678 tak, aby vzniklo číslo deliteľné tromi? Úlohu vyriešte aj pre číslo 5 678 910.

N3 Akú hodnotu môže mať číslica a , ak päťciferné číslo $647aa$ je deliteľné tromi?

N4 Je daná postupnosť čísel

1, 12, 123, 1234, ... 123456789.

Nájdite v nej dvojice po sebe nasledujúcich čísel, kde obe z nich sú deliteľné tromi.

D1 Určte, koľko je všetkých dvojíc čísl a, b takých, že sedemciferné číslo

$ab05bba$

je deliteľné tromi.

6 V danom obdĺžniku $ABCD$ leží na strane CD bod E tak, že úsečky AE a EC sú zhodné. Os úsečky AE prechádza bodom D a pretína uhlopriečku AC v bode G .

Určte veľkosť uhla DGC .

(Marián Macko)

N1 V trojuholníku ABC leží vrchol A na osi strany BC a

a) $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ 40'$;

b) $|\sphericalangle CAB| = 70^\circ 40'$.

Vypočítajte veľkosť uhla BCA .

N2 Os strany AB kosoštvorca $ABCD$ prechádza vrcholom D . Určte veľkosť všetkých vnútorných uhlov kosoštvorca $ABCD$.

N3 Je daný štvorec $ABCD$. Na jeho strane AB leží bod K a na jeho strane AD bod L tak, že $|\sphericalangle AKL| = 28^\circ$. Vypočítajte veľkosť uhla DLK :

a) pomocou vlastností trojuholníka AKL ;

b) pomocou vlastností štvoruholníka $KBDL$.

D1 V trojuholníku ABC sú na strane AB umiestnené body K, L tak, že $|AK| = |KC| = |CL| = |LB|$, pričom $|AK| < |AL|$ a $|\sphericalangle KCL| = 40^\circ$. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC .

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2026/2027

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z7

- 1 Je daný štvorec, ktorý je zložený z 52 neprekrývajúcich sa menších štvorčekov. Z nich 51 má obsah 1 cm^2 a zvyšný štvorček má dĺžku strany v centimetroch vyjadrenú prirodzeným číslom.

Aký obsah môže mať daný štvorec? Určte všetky možnosti.

(Erika Novotná)

- N1 Miška mala v krabici dieliky skladačky, celkom 8 štvorcov so stranou 1 cm a 5 štvorcov so stranou 2 cm . Vždy si vzala niekoľko dielikov (aj jeden) a zostavila z nich štvorec. Aký obsah mohli mať zostavené štvorce? Nájďte všetky možnosti.

Riešenie:

Dá sa zostaviť štvorec s obsahom 1 cm^2 , 4 cm^2 , 9 cm^2 a 16 cm^2 . Štvorec s obsahom 25 cm^2 zostaviť nemožno: potrebovali by sme päť dielikov 2×2 , do štvorca 5×5 sa však zmestia najviac štyri. Na väčšie štvorce už Miška nemá dost dielikov.

- N2 Máme obdĺžnikové dieliky s rozmermi 3 cm a 5 cm . Z niekoľkých takých dielikov zostavíme štvorec. Aký môže byť jeho najmenší obsah?

Riešenie:

Strana štvorca musí byť deliteľná 5 aj 3, teda aspoň 15 cm . Štvorec 15×15 naozaj poskladať vieme (päť pásov 15×3 , každý z troch dielikov). $15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$.

- N3 Máme obdĺžnikové dieliky s rozmermi 4 cm a 6 cm . Z niekoľkých takých dielikov zostavíme štvorec. Aký môže byť jeho najmenší obsah?

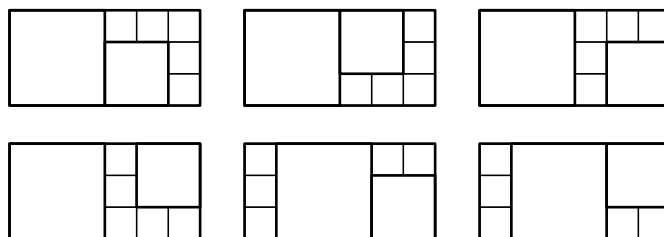
Riešenie:

Strana štvorca musí byť deliteľná 4 aj 3, teda aspoň 12 cm . Štvorec 12×12 naozaj poskladať vieme (dva pásy 12×6 , každý z troch dielikov). $12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$.

- D1 Máme k dispozícii päť štvorcových dielikov so stranou 1 cm , jeden štvorcový dielik so stranou 2 cm a jeden štvorcový dielik so stranou 3 cm . Koľkými spôsobmi môžeme zo všetkých týchto dielikov poskladať obdĺžnik? Záleží iba na polohe štvorcových dielikov v obdĺžniku. Dve poskladania budeme považovať za rovnaké, ak sa dajú na seba previesť otočením celých týchto poskladaní.

Riešenie:

Obsah obdĺžnika musí byť $5 \cdot 1 + 4 + 9 = 18 \text{ cm}^2$ a obe jeho strany musia merať aspoň 3 cm – teda jediný vyhovujúci obdĺžnik má rozmery 3 cm a 6 cm . Veľký dielik môže ležať pri kraji obdĺžnika (potom zvyšný štvorec 3×3 vyplníme dielikom 2×2 v jednom zo štyroch rohov, máme teda 4 možnosti) alebo o jeden centimeter posunutý od kraja (potom dielik 2×2 leží v zvyšnom páse 3×2 , teda 2 možnosti). Dokopy existuje 6 rôznych poskladaní.



- 2 V štyroch zásuvkách bolo spolu 62 guľôčok. Postupne sme do niektorých zásuviek presúvali guľôčky z ostatných troch zásuviek, a to zo všetkých rovnako:

- najprv po šesť guľôčok do tretej zásuvky,
- potom po tri guľôčky do druhej zásuvky,
- potom po jednej guľôčke do prvej zásuvky.

Nakoniec bolo v druhej zásuvke o päť guľôčok viac ako v prvej, v tretej o päť viac ako v druhej a vo štvrtnej o päť viac ako v tretej.

Koľko guľôčok bolo v jednotlivých zásuvkách pred presúvaním?

N1 V každej z dvoch misiek bolo 15 gulôčok. Koľko gulôčok musíme preložiť z prvej misky, aby:

- a) ich v druhej miske bolo o 8 viac než v prvej miske;
- b) ich v druhej miske bolo o 9 viac než v prvej miske;
- c) ich v druhej miske bolo 4-krát viac než v prvej miske?

Riešenie:

(a) 4 gulôčky; (b) nedá sa, pokiaľ gulôčky nedelíme; (c) 9 gulôčok.

N2 Máme tri misky a v nich gulôčky. V prvej miske je o 7 gulôčok menej než v druhej miske. V druhej miske je o polovicu viac gulôčok než v tretej miske. V tretej miske je 60 gulôčok. Koľko gulôčok je v prvej miske?

Riešenie:

V druhej miske je $60 + 30 = 90$ gulôčok. V prvej miske tak je $90 - 7 = 83$ gulôčok.

N3 V dvoch miskách bol rovnaký počet gulôčok. Keď sme z prvej misky preložili 4 gulôčky do druhej misky, bolo v druhej miske trikrát toľko gulôčok ako v prvej miske. Koľko gulôčok bolo pôvodne v prvej miske?

Riešenie:

Pretože po presune bolo v druhej miske trikrát viac gulôčok, môžeme rozdeliť počty gulôčok na $\frac{1}{4}$ gulôčok na prvej miske a $\frac{3}{4}$ na druhej miske. Presunuli sme teda $\frac{1}{4}$ všetkých gulôčok, čiže 4 gulôčky tvoria štvrtinu z celku. Všetkých gulôčok je teda $4 \cdot 4 = 16$ a pôvodne ich bolo v každej miske $16 : 2 = 8$.

D1 V každej zo štyroch misiek máme rovnaký počet gulôčok. Z prvej misky presunieme polovicu gulôčok do štvrtej misky a z druhej misky presunieme dve gulôčky do tretej misky. Teraz je v každej nasledujúcej miske o rovnaký počet gulôčok viac než v predchádzajúcej miske. Koľko gulôčok dohromady bolo vo všetkých miskách?

Riešenie:

Po presune je v tretej miske o 4 gulôčky viac než v druhej. Rovnako sa musia líšiť počty gulôčok v prvej a druhej miske, teda z prvej misky sme odobrali 6 gulôčok. V prvej miske tak pôvodne bolo $6 \cdot 2 = 12$ gulôčok a vo všetkých miskách bolo dokopy $4 \cdot 12 = 48$ gulôčok.

D2 Snehulienka dala každému zo siedmich trpaslíkov rovnaký počet gulôčok. Trpaslíci hádzali hracou kockou. Koľko bodiek im padlo, toľko gulôčok museli vrátiť Snehulienke. Každému zo šiestich trpaslíkov padol iný počet bodiek. Koľko bodiek padlo siedmemu trpaslíkovi, keď trpaslíkom zostalo dokopy 46 gulôčok? Koľko gulôčok dala Snehulienka každému trpaslíkovi na začiatku?

Riešenie:

Šiesti trpaslíci hodili navzájom rôzne čísla, teda 1, 2, 3, 4, 5 a 6, a vrátili dokopy 21 gulôčok. Siedmy vrátil najviac 6 gulôčok, takže Snehulienka rozdala najmenej $46 + 21 + 1 = 68$ a najviac $46 + 21 + 6 = 73$ gulôčok. Toto číslo musí byť deliteľné siedmimi, jediné také je 70, takže každý trpaslík dostal $70 : 7 = 10$ gulôčok. Siedmemu trpaslíkovi tak padli $70 - 46 - 21 = 3$ bodky. (55. ročník MO, úloha Z6-II-3.)

3 Ciferník čarodejných hodín má zvyčajný tvar kruhu, ale nezvyčajný počet hodín. Číslo hodín sú rovnomerne rozmiestnené po obvode kruhu, je ich viac ako 50 a menej ako 80. Oproti číslu 36 vzhľadom na stred ciferníka je číslo deliteľné piatimi.

Koľko hodín môžu mať čarodejné hodiny? Určte všetky možnosti.

(Marián Macko)

N1 Uvažujme ciferník bežných ručičkových hodín (o dvanástich hodinách). Ktoré čísla zodpovedajú v stredovej súmernosti podľa stredu ciferníka číslam, ktoré sú násobkom piatich?

Riešenie:

Násobky piatich sú 5 a 10. Stredovo súmerné podľa stredu ciferníka sú s nimi čísla 11 a 4.

N2 Ktoré čísla by zodpovedali v stredovej súmernosti číslu 36, keby mali čarodejné hodiny práve

- a) 40 hodín;
- b) 41 hodín;
- c) 42 hodín?

Riešenie:

(a) Oproti 40 leží $40 : 2 = 20$. Potom proti 39 leží 19 atď., proti 36 leží 16. (b) Pretože počet hodín na ciferníku je nepárny, proti žiadnemu číslu neleží v stredovej súmernosti iné číslo a úloha tak nemá riešenie. (c) Podobne ako v (a) odvodíme, že proti 36 leží číslo 15.

N3 Koľko hodín by mali čarodejné hodiny, keby bolo 36 napísané

- a) najviac napravo na ciferníku (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 3);
 - b) najviac naľavo na ciferníku (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 9);
 - c) ako druhé číslo vpravo od čísla najnižšie (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 6) na ciferníku;
 - d) ako druhé číslo vľavo od čísla najvyššie (tam, kde je na obyčajných hodinách číslo 12) na ciferníku?
- (Najväčšie číslo na ciferníku stojí na ňom najvyššie, vpravo od neho je 1, potom 2 atď.)

Riešenie:

(a) $36 \cdot 4 = 144$ hodín; (b) $36 : 3 \cdot 4 = 48$ hodín; (c) $(36 + 2) \cdot 2 = 76$ hodín; (d) $36 + 2 = 38$ hodín.

D1 Na ciferníku elfích hodín sú čísla 24 a 34 súmerné podľa zvislej osi prechádzajúcej stredom ciferníka a jeho najväčším číslom. Aké číslo je stredovo súmerné s číslom 15? (Najväčšie číslo na ciferníku stojí na ňom najvyššie, vpravo od neho je 1, potom 2 atď.)

Riešenie:

Aritmetický priemer čísel 24 a 34 je číslo 29, a to musí ležať na zvislej osi, najnižšie na ciferníku. Najvyššie číslo na ciferníku je tak $2 \cdot 29 = 58$. Potom zo stredovej súmernosti plynie, že pre hľadané číslo x platí $29 - 15 = 58 - x$, teda $x = 44$.

4 Anna a Zuzana bývajú na rovnakej ulici.

Raz sa súčasne vybrali oproti sebe zo svojich domovov, každá konštantnou rýchlosťou. Zuzana zistila, že si zabudla mobil, preto sa v osmine vzdialenosti medzi oboma domami otočila a vrátila sa domov. Tam jej mama ihneď podala mobil a Zuzana sa vzápätí vydala pôvodným smerom.

Keď sa dievčatá stretli, boli v polovici cesty medzi svojimi domami a od spoločného začiatku ich cesty uplynulo 15 minút.

Za aký čas by sa dievčatá stretli, keby sa Zuzana nevracala po mobil?

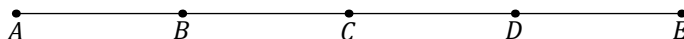
(Monika Janičová)

N1 Z miesta A vedie do miesta B pešia cesta dlhá 12 km, z miesta B možno pokračovať do miesta C po ceste dlhej 24 km. Arnošt vyšiel z A , proti nemu šiel Ctirad z C . Stretli sa uprostred medzi miestami B a C . Ako ďaleko od C by sa stretli, keby Arnošt vyšiel z miesta B a obaja by šli rovnako rýchlo ako predtým?

Riešenie:

Arnošt prešiel $12 + 12 = 24$ km, Ctirad iba 12 km. Teda Arnošt ide dvakrát rýchlejšie než Ctirad. Preto Arnošt prejde dvakrát väčšiu vzdialenosť, takže by sa v druhom prípade stretli $24 : 3 = 8$ km od miesta C .

N2 Úsečka AE je bodmi B, C, D rozdelená na štyri rovnako dlhé úseky.



Mravec vyšiel z bodu A do bodu B , otočil sa a potom sa vrátil do A . Potom došiel do C , otočil sa a vrátil sa do A . Potom došiel do D , otočil sa a opäť sa vrátil do A . Nakoniec došiel do bodu E . Lienka šla rovno z bodu A do bodu E . Koľkokrát bola dráha lienky kratšia než dráha mravca?

Riešenie:

Označme dĺžku jedného úseku ako x . Potom mravec prešiel $x + x + 2x + 2x + 3x + 3x + 4x = 16x$. Lienka prešla iba $4x$. Teda dráha lienky bola štyrikrát kratšia.

N3 Peter by za 5 minút prešiel na bicykli $\frac{1}{6}$ trasy. Keby šiel pešo, za 40 minút by prešiel $\frac{1}{4}$ tej istej trasy. Nakoniec vyrazil na bicykli, v polovici trasy dostal defekt, a tak zvyšok trasy prešiel pešo. Ako dlho mu trvalo prejsť celú trasu?

Riešenie:

Na bicykli šiel Peter $3 \cdot 5 = 15$ minút (pretože polovica je rovná trom šestinám). Potom šiel ešte $2 \cdot 40 = 80$ minút (pretože polovica je rovná dvom štvrtinám). Celkom Peter potreboval na prejdienie trasy $15 + 80 = 95$ minút.

N4 Korytnačky Žaneta a Žofia boli sestry a žili v jednom dome so záhradou. Žaneta potrebovala na prejdienie rovnakej dráhy o tretinu viac času než Žofia.

- a) Ak Žofia obišla záhradu za 3 hodiny, za ako dlho by ju obišla Žaneta?
- b) Ak Žaneta obíde dom za 2 hodiny, za ako dlho by ho obišla Žofia?
- c) Ak má Žaneta prejsť dráhu dvanásťkrát dlhšiu než Žofia, koľkokrát viac času bude potrebovať?

Riešenie:

(a) Za rovnaký čas prejde Žaneta $\frac{3}{4}$ dráhy Žofie. Teda za 3 hodiny Žaneta obíde $\frac{3}{4}$ záhrady a zostáva jej štvrtina cesty – tú dokončí za ďalšiu hodinu. Teda celú záhradu obíde Žaneta za 4 hodiny. (b) Žofia by za 2 hodiny obišla $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ domu. Teda potrebuje o štvrtinu menej času, teda 1,5 hodiny. (c) Rovnakú dráhu ako Žofia by Žaneta prešla za $\frac{4}{3}$ času. Teda dvanásťkrát dlhšiu dráhu prejde za $\frac{4}{3} \cdot 12 = 16$ -násobok času Žofie.

- 5 Nájdite všetky trojice cifier a, b, c tak, aby všetky dvojciferné čísla $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$ a trojciferné číslo $\overline{abc}$ boli deliteľné tromi.

(Patrik Bak)

- N1 Vyslovte kritérium deliteľnosti tromi. Ktoré z nasledujúcich čísel sú tromi deliteľné?

44, 555, 6 666, 789

Riešenie:

Deliteľné sú čísla 555, 6 666 a 789.

- N2 Ktorú číslicu môžeme škrtnúť v čísle 45 678 tak, aby vzniklo číslo deliteľné tromi? Úlohu vyriešte aj pre číslo 5 678 910.

Riešenie:

Pre prvé číslo iba 6, pre druhé číslo 6, 9 alebo 0.

- N3 Akú hodnotu môže mať číslica a , ak päťciferné číslo $64\,7aa$ je deliteľné tromi?

Riešenie:

2, 5 alebo 8.

- N4 Je daná postupnosť čísel

1, 12, 123, 1 234, ... 123 456 789.

Nájdite v nej dvojice po sebe nasledujúcich čísel, kde obe z nich sú deliteľné tromi.

Riešenie:

12 a 123, 12 345 a 123 456, 12 345 678 a 123 456 789.

- D1 Určte, koľko je všetkých dvojíc číslic a, b takých, že sedemciferné číslo

$a\,b\,0\,5\,b\,a\,a$

je deliteľné tromi.

Riešenie:

Pretože ciferný súčet čísla je $3a + 2b + 5$, číslica a deliteľnosť tromi neovplyvní, môže byť ľubovoľná nenulová. Potom teda $2b + 5$ musí byť násobkom troch, čo bude pre b rovné dvom, piatim alebo ôsmim. Celkom je $9 \cdot 3 = 27$ vyhovujúcich dvojíc.

- 6 V danom obdĺžniku $ABCD$ leží na strane CD bod E tak, že úsečky AE a EC sú zhodné. Os úsečky AE prechádza bodom D a pretína uhlopriečku AC v bode G .

Určte veľkosť uhla DGC .

(Marián Macko)

- N1 V trojuholníku ABC leží vrchol A na osi strany BC a

a) $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ 40'$;

b) $|\sphericalangle CAB| = 70^\circ 40'$.

Vypočítajte veľkosť uhla BCA .

Riešenie:

Trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC . Preto môžeme určiť veľkosti uhlov:

(a) $70^\circ 40'$; (b) $(180^\circ - 70^\circ 40') : 2 = 54^\circ 40'$.

- N2 Os strany AB kosoštvorca $ABCD$ prechádza vrcholom D . Určte veľkosť všetkých vnútorných uhlov kosoštvorca $ABCD$.

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že trojuholník ABD je rovnoramenný so základňou AB , a pretože kosoštvorec má rovnako dlhé všetky strany, trojuholník musí byť dokonca rovnostranný. Preto vnútorné uhly pri vrchoch A a C majú veľkosť 60° a zvyšné vnútorné uhly majú veľkosť 120° .

N3 Je daný štvorec $ABCD$. Na jeho strane AB leží bod K a na jeho strane AD bod L tak, že $|\sphericalangle AKL| = 28^\circ$. Vypočítajte veľkosť uhla DLK :

- a) pomocou vlastností trojuholníka AKL ;
- b) pomocou vlastností štvoruholníka $KBDL$.

Riešenie:

$|\sphericalangle DLK| = 118^\circ$. V (a) môžeme využiť vzťah medzi vonkajšími a vnútornými uhlami trojuholníka. V (b) potom dopočítame $|\sphericalangle LKB| = 180^\circ - |\sphericalangle AKL| = 152^\circ$, $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ADB| = 45^\circ$ a využijeme súčet vnútorných uhlov štvoruholníka.

D1 V trojuholníku ABC sú na strane AB umiestnené body K, L tak, že $|AK| = |KC| = |CL| = |LB|$, pričom $|AK| < |AL|$ a $|\sphericalangle KCL| = 40^\circ$. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC .

Riešenie:

Trojuholníky KLC , ACK a BCL sú rovnoramenné so základňami KL , AC a BC . Preto $|\sphericalangle CKL| = |\sphericalangle KLC| = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. Ďalej v trojuholníkoch ACK a BCL sú pri hlavných vrchoch vnútorné uhly $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Preto $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = (180^\circ - 110^\circ) : 2 = 35^\circ$ a $|\sphericalangle BCA| = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Iveta Jančígová
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Marián Macko, Daniela Kovalčíková